

Oscil·ladors en ressonància

DAVID ROJAS

Resum: Un oscil·lador és un sistema en el qual tots els moviments possibles són periòdics. Si aquest període és comú per a tots els moviments, es diu que l'oscil·lador és isòcron. Quan el sistema és forçat per una pertorbació periòdica amb el mateix període, la dinàmica pot canviar dràsticament i el fenomen de ressonància pot aparèixer. En aquest article estudiarem quines propietats han de complir aquestes pertorbacions per obtenir solucions no acotades. Considerarem diferents oscil·ladors, des de l'armònic fins a generalitzacions no lineals, i farem un tast del concepte de ressonància autoparamètrica.

Paraules clau: oscil·lador, ressonància, pertorbació, isocronia.

Classificació MSC2020: 34C10, 34C15, 34D05, 34D10, 34D23.

1 Introducció

És abril de 1831. Una brigada de soldats de l'armada britànica marxen a pas sobre el pont penjant de Broughton per creuar el riu Irwell a Broughton, prop de Manchester. De sobte, el pont s'ensorra i una dotzena de soldats acaben a l'aigua del riu. Poc després, l'armada britànica comunica a tots els seus soldats que, a partir d'ara, és obligat trencar el pas de la marxa en creuar un pont llarg.

El cantant de rock Jaime Vendera, l'any 2005, al programa *MythBusters* de Discovery Channel, esmicola una copa de vidre fent servir només la seva veu, amb un crit de 105 decibels. Se'n pot veure una representació al seu canal de Youtube [41].

Segons Josuè 6:1-27, l'armada israelita va creuar el riu Jordà i va envoltar la ciutat emmurallada de Jericó. Durant sis dies Josuè fa marxar les seves tropes al voltant de la ciutat i al setè fa sonar els corns de banyes de moltó. Llavors, el mur cau i els israelites cremen la ciutat.

Un nen demana ser empès al gronxador del parc de la plaça. Els seus pares, de forma sincronitzada, li donen petits impulsos que, a poc a poc, fan que vagi agafant altura.

Totes aquestes històries tenen un comú denominador. En tots els casos, un sistema vibratori es veu afectat per una força periòdica externa. En el cas

en què la freqüència de la força externa coincideix amb la del sistema, aquest experimenta un creixement de l'amplitud del seu estat, que molt probablement produirà el seu col·lapse. Aquest fenomen és conegut com a *ressonància*.

El concepte de ressonància es fa servir en diversos camps i amb diferents sentits. Els exemples anteriors corresponen al concepte de ressonància lligat a la pertorbació periòdica de sistemes oscil·latoris, com també ho són la ressonància acústica dels instruments musicals (vegeu l'article de Tomás Sanz-Perela en aquest mateix número), la ressonància de marea de la badia de Fundy i la dinàmica del tub de Rubens, una representació del funcionament del qual es pot veure al canal de Youtube *Steve Mould* [27]. Quan parlem de ressonància, intuïtivament pensem en dos fenòmens que succeeixen alhora: la coincidència de dues freqüències (la del sistema i la de la pertorbació) i un creixement de l'amplitud del sistema que acaba produint inestabilitat. A vegades, però, el concepte de ressonància es fa servir només lligat al primer dels fenòmens. Per exemple, la ressonància orbital pot donar lloc tant a la inestabilitat del sistema, tal com mostren els forats de l'anell de Saturn, com també a l'estabilitat, com en el cas de la ressonància $1 : 2 : 4$ de les llunes de Júpiter, Io, Europa i Ganimedes.

En aquest treball ens centrarem en la ressonància que provoca inestabilitat. Més concretament, farem un recull de resultats sobre ressonància d'oscil·ladors pertorbats periòdicament i entendrem, durant pràcticament tot el text, el concepte de ressonància com el fet que totes les solucions del sistema són no acotades. Veurem els dos exemples mecànics més senzills: l'oscil·lador harmònic i l'oscil·lador asimètric, i continuarem amb exemples més generals fugint de la linealitat.

A l'última secció tractarem un concepte de ressonància subtilment diferent, la ressonància autoparamètrica. En comptes d'una força externa, considerarem models amb dos modes vibratoris propis. Veurem com el fet que el sistema estigui en ressonància, és a dir, que les freqüències dels dos modes siguin commensurables, provoca que el sistema mostri inestabilitat.

Un lector amb coneixements de ressonància trobarà a faltar en aquesta introducció el que segurament és l'exemple més paradigmàtic: el col·lapse del pont de Tacoma-Narrows. Aquest exemple s'ha omès intencionadament. Primer, per la falta d'unanimitat sobre el motiu del col·lapse i, segon, perquè estudis recents suggereixen que el fenomen de ressonància no és produït pel vent com a força externa, sinó per la ressonància entre els modes vibratoris vertical i de torsió del pont. Veurem un model que intenta explicar aquest fet a la darrera secció.

2 Pertorbacions externes

El fet de considerar equacions diferencials de segon ordre autònomes per descriure models físics no és circumstancial. A la mecànica clàssica, la segona llei de Newton relaciona l'acceleració d'una partícula amb les forces que hi interactuen, les quals depenen (normalment) de la seva posició i velocitat. En electrònica, la llei de Kirchhoff relaciona la intensitat de corrent amb la seva derivada temporal i la seva primitiva. En ambdós casos, i molts altres, la

dinàmica del sistema ve descrita per una equació diferencial de segon ordre. Per exemple, en el cas d'un circuit RLC en sèrie, quan el voltatge de la font és constant, $V(t) = V_0$, la intensitat de corrent $I(t)$ satisfà l'equació diferencial de segon ordre lineal

$$L\ddot{I}(t) + R\dot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = 0,$$

on L , R i C són la inductància de la bobina, la resistència i la capacitat del condensador, respectivament. En l'equació anterior i durant tot el treball, usarem $\dot{f}(t)$ i $\ddot{f}(t)$ per denotar la derivada primera i segona de la funció $f(t)$, respectivament. Quan, en canvi, la font és un corrent altern, la funció $V(t)$ és periòdica i la intensitat de corrent satisfà una equació diferencial forçada periòdicament,

$$L\ddot{I}(t) + R\dot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = \frac{d}{dt}V(t).$$

Aquest fet motiva l'estudi de pertorbacions periòdiques de sistemes autònoms. Un altre exemple el podem trobar a la mecànica celeste. Quan dos cossos interactuen segons la llei de la gravitació, el moviment del primer cos ve descrit per l'equació de Kepler

$$\ddot{x} = -\frac{Gm_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{x}{|x|^3},$$

on $x(t)$ és la posició de la massa m_1 suposant que el centre de masses del problema és l'origen, i m_2 és la massa del segon cos. Es tracta, en efecte, d'una equació diferencial autònoma de segon ordre. Quan més cossos entren en joc, el problema esdevé molt més complicat. En ocasions és interessant considerar com afecten l'equació anterior forces exercides per altres astres de manera periòdica i, per tant, es consideren pertorbacions periòdiques de l'equació de Kepler,

$$\ddot{x} = -\frac{Gm_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{x}{|x|^3} + p(t, x).$$

Com hem comentat a la introducció, l'efecte de ressonància pot aparèixer quan un sistema autònom que presenta solucions periòdiques és pertorbat periòdicament. Durant tota la secció considerarem sistemes autònoms en els quals totes les solucions són periòdiques d'un mateix període. D'aquesta manera, direm que el sistema és un oscil·lador i el període d'aquest oscil·lador és el període comú de totes les seves solucions. Quan un sistema en aquestes condicions és forçat amb una pertorbació periòdica externa amb el mateix període que el de l'oscil·lador, el fenomen de ressonància pot aparèixer. En aquest context, entendrem ressonància com la propietat que totes les solucions del sistema pertorbat són no acotades. Més concretament, si $x(t)$ és la solució del sistema pertorbat, aleshores

$$|x(t_n)| + |\dot{x}(t_n)| \rightarrow +\infty$$

per a alguna successió $\{t_n\}$. En aquesta secció estudiarem aquest fenomen en diferents models, començant pel cas lineal, l'oscil·lador harmònic, passant per

la seva versió asimètrica i completant amb algunes generalitzacions d'ambdós casos. Per a un resum més complet d'alguns dels resultats sobre ressonància, existència d'òrbites periòdiques i solucions no acotades de sistemes pertorbats periòdicament que presentarem, vegeu el treball de Mawhin [25].

2.1 L'oscil·lador harmònic

Comencem aquesta secció amb una derivació de l'oscil·lador harmònic que, tot i ser elemental, ens servirà de guia al llarg d'aquest treball.

Considerem una molla amb constant de rigidesa $k > 0$ penjada del sostre (vegeu la figura 1). Com més gran és la constant k , més rígida és la molla i, en conseqüència, més «difícil» és estirar-la (o estrènyer-la). Per evitar problemes de xoc amb el sostre, suposarem que aquest està «infinitament» lluny de l'extrem de la molla d'on pengem una massa $m > 0$. En penjar la massa, el seu pes desplaça la molla una certa distància $d_0 > 0$ respecte de la posició d'equilibri inicial, i assolix una altra posició d'equilibri. Segons la primera llei de Newton, en equilibri la suma total de forces que intervenen en el sistema mecànic ha de ser nul·la. En aquest cas, observem dues forces que mantenen aquest equilibri. En primer lloc, el pes de la massa penjada de l'extrem de la molla, amb magnitud mg , on g és l'acceleració de la gravetat al lloc on es troba la massa. En segon lloc, la força que la molla exerceix per evitar que la massa caigui i que, segons la llei de Hooke, té magnitud kd_0 . Fixem que el sentit positiu del moviment és el marcat pel pes. Llavors, la primera llei de Newton diu:

$$mg - kd_0 = 0. \quad (1)$$

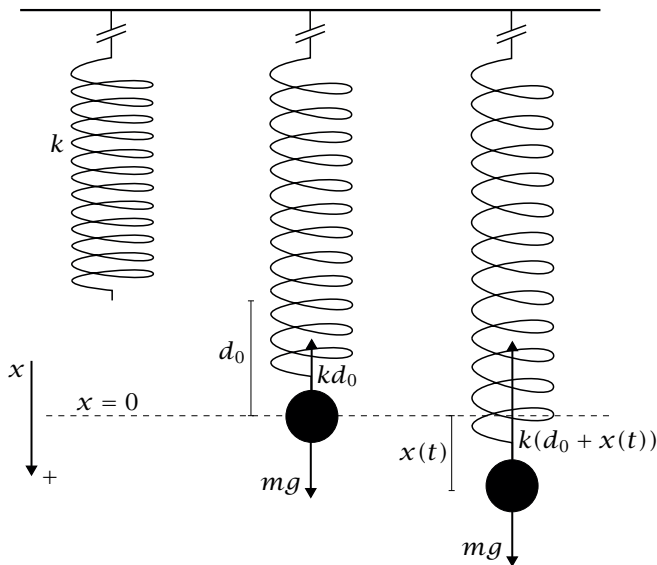


FIGURA 1: Representació d'un oscil·lador harmònic amb les forces internes que hi interactuen.

Denotem amb $x(t)$ el desplaçament de la massa respecte de la posició d'equilibri. Ara, la força de la molla és $k(d_0 + x(t))$, mentre que el pes roman constant. Tenim, doncs, un desequilibri de forces i, en conseqüència, moviment. Segons la segona llei de Newton,

$$mg - k(d_0 + x(t)) = m\ddot{x}(t),$$

on $\dot{x}(t)$ és la velocitat de l'objecte i $\ddot{x}(t)$ la seva acceleració. Observem que l'anterior igualtat es redueix, fent servir l'equació (1), a l'expressió

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad (2)$$

amb $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}$. L'equació (2) és l'*oscil·lador harmònic* (o *oscil·lador lineal*) i té com a freqüència natural ω , degut al fet que totes les solucions són de la forma

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

és a dir, totes tenen període mínim $T = \frac{2\pi}{\omega}$. En l'expressió anterior, A denota l'amplitud de l'oscil·lació $x(t)$ i φ és la fase. La freqüència ω i, per tant, el període T només depenen dels paràmetres del sistema (k i m) i són comuns a totes les solucions, independentment de les condicions de posició i velocitat inicials de la massa. En particular, es diu que l'equació (2) té un centre isòcron a l'origen.

Un equilibri és un centre si totes les solucions amb condicions inicials properes són periòdiques. Si, a més a més, el període és comú a totes les solucions, el centre es diu isòcron. En el cas de l'oscil·lador harmònic, la solució constant $x(t) = 0$ és un equilibri i, com hem vist, totes les altres solucions de (2) són periòdiques de període $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Considerem ara l'oscil·lador harmònic (2) forçat externament per una funció contínua i 2π -periòdica $p(t)$,

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = p(t). \quad (3)$$

Fem notar que prendre $p(t)$ amb període 2π no és restrictiu. En efecte, un canvi proporcional de temps és suficient per obtenir $p(t)$ amb el període desitjat a canvi de modificar ω . En aquest punt és natural preguntar-se com es comporten les solucions de l'equació (3).

Tota funció contínua 2π -periòdica té un desenvolupament en sèrie de Fourier

$$p(t) \sim p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos(nt) + q_n \sin(nt)).$$

La convergència de la sèrie de Fourier depèn de la regularitat de la funció $p(t)$. Per obtenir convergència puntual és suficient tenir diferenciabilitat amb derivada contínua, mentre que la continuïtat assegura convergència *gairebé per a tot t*. Donat que l'objectiu d'aquesta discussió no recau en la regularitat de la pertorbació, el lector pot assumir-ne més que continuïtat per convèncer-se de fer servir la igualtat = en comptes de l'aproximació \sim en la identitat anterior.

La linealitat de l'equació (3) permet trobar la solució com a suma de les solucions de les equacions

$$\ddot{x}_n(t) + \omega^2 x_n(t) = p_n \cos(nt) + q_n \sin(nt), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

de tal forma que $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t)$. L'equació anterior es pot resoldre, per exemple, fent servir la transformada de Laplace. Denotant amb $X_n(s) = \mathcal{L}\{x_n(t)\}(s)$,

$$X_n(s) = \frac{s x_n(0) + \dot{x}_n(0)}{s^2 + \omega^2} + \frac{p_n s + q_n n}{(s^2 + n^2)(s^2 + \omega^2)}.$$

El primer sumand de l'expressió correspon, després de fer la transformada inversa de Laplace, a la solució de la part homogènia de (4). En el segon terme és on el fenomen de ressonància entra en acció. Observem que l'expressió de $x_n(t)$ varia significativament si $\omega \neq n$ o bé si $\omega = n$. En efecte, en el primer cas

$$x_n(t) = \frac{A_n \cos(\omega t) + B_n \sin(\omega t) + p_n \cos(nt) + q_n \sin(nt)}{\omega^2 - n^2},$$

amb $A_n = x_n(0)(\omega^2 - n^2) - p_n$ i $B_n = \frac{1}{\omega}(\dot{x}_n(0)(\omega^2 - n^2) - q_n n)$. Observem que en el cas $\omega \neq n$ les solucions són genèricament quasiperiòdiques i acotades, i existeix només una solució amb el mateix període que la pertorbació externa $p(t)$: aquella que anul·la els coeficients A_n i B_n . Quan $\omega = n$, les solucions són de la forma

$$x_n(t) = \frac{(2n^2 x_n(0) - n q_n t) \cos(nt) + (2\dot{x}_n(0) + q_n + n p_n t) \sin(nt)}{2n^2}.$$

En aquest cas, les solucions són genèricament no acotades excepte el cas en què p_n i q_n s'anul·len. Aquest raonament és clàssic i es resumeix en el resultat següent.

PROPOSICIÓ 1. *Sigui $p(t)$ una funció contínua 2π -periòdica, aleshores:*

- (a) *Si $\omega \neq n \in \mathbb{N}$, totes les solucions de l'equació (3) són quasiperiòdiques i acotades excepte una, que és 2π -periòdica.*
- (b) *Si $\omega = n \in \mathbb{N}$ i $p_n^2 + q_n^2 \neq 0$, totes les solucions de l'equació (3) són no acotades.*
- (c) *Si $\omega = n \in \mathbb{N}$ i $p_n^2 + q_n^2 = 0$, totes les solucions de l'equació (3) són 2π -periòdiques.*

Hem observat que per obtenir el fenomen de ressonància és necessari que el període de la pertorbació externa sigui el mateix que el període de l'oscil·lador harmònic, però no és suficient. Necessitem la condició extra $p_n^2 + q_n^2 \neq 0$ que, tot i ser genèrica, evidentment no sempre se satisfà. Com a exemple d'aquest fenomen, considerem l'oscil·lador harmònic amb període mínim 2π pertorbat per una funció 2π -periòdica $p(t)$,

$$\ddot{x} + x = p(t). \quad (5)$$

En aquest cas, $\omega = 1$. La funció $p(t) = \cos(t) + \cos(2t)$ és 2π -periòdica amb $p_1 = p_2 = 1$, $p_n = 0$ per a $n \neq 1, 2$ i $q_n = 0$ per a tot $n \geq 1$. En particular, $p_1^2 + q_1^2 = 1$ i, en conseqüència, la pertorbació provoca ressonància (vegeu la figura 2 esquerra). En canvi, la funció $p(t) = \cos(2t) + \cos(3t)$ també és 2π -periòdica amb $p_2 = p_3 = 1$, $p_n = 0$ per a $n \neq 2, 3$ i $q_n = 0$ per a tot $n \geq 1$. Donat que $p_1^2 + q_1^2 = 0$, aquesta força externa no provoca ressonància (vegeu la figura 2 dreta).

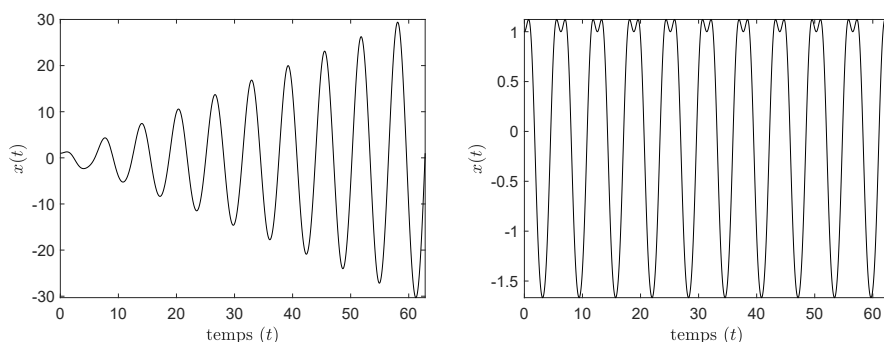


FIGURA 2: Solució de (5) amb condicions inicials $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ amb $p(t) = \cos(t) + \cos(2t)$ (esquerra) i $p(t) = \cos(2t) + \cos(3t)$ (dreta).

La condició $p_n^2 + q_n^2 \neq 0$ pot escriure's de manera equivalent fent servir la notació complexa de la sèrie de Fourier. En efecte,

$$p(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{p}_n e^{int}, \text{ amb } \hat{p}_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(t) e^{-int} dt.$$

D'aquesta manera, $|\hat{p}_n| = \frac{1}{2}(p_n^2 + q_n^2)^{\frac{1}{2}}$ i, per tant, la condició $p_n^2 + q_n^2 \neq 0$ és equivalent a

$$|\hat{p}_n| > 0. \quad (6)$$

És legítim anomenar-la *condició de ressonància* de l'oscil·lador harmònic.

És important observar que tota la discussió anterior és independent de l'amplitud de la força periòdica externa. És a dir, el fenomen de ressonància apareix tot i que la pertorbació sigui petita. En altres paraules, podem escriure l'equació (3) com

$$\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \epsilon p(t), \quad (7)$$

i la condició de ressonància implicarà que totes les solucions són no acotades per a tot $0 < \epsilon \ll 1$. Això subratlla que el fet d'obtenir solucions no acotades no prové de la quantitat d'energia que la força afegeix al sistema, sinó del moment en el qual aquesta energia s'està introduint. El terme «energia» utilitzat prové de la física i fa referència al hamiltonià del sistema, interpretat com l'energia total

del model. En el cas de l'oscillador harmònic sense pertorbar, l'energia total es conserva al llarg de les trajectòries. És a dir, si $x_0(t)$ és solució de (2),

$$E_0 = \frac{\dot{x}_0(t)^2}{2} + \omega^2 \frac{x_0(t)^2}{2}$$

per a tot $t \in \mathbb{R}$ i E_0 depèn només de les condicions inicials de $x_0(t)$. En canvi, quan el sistema és forçat periòdicament per una pertorbació $\epsilon p(t)$, aleshores l'energia del sistema canvia al llarg del temps com

$$E(t) = \frac{\dot{x}(t)^2}{2} + \omega^2 \frac{x(t)^2}{2} + \epsilon p(t),$$

on $x(t)$ és solució de l'equació (7). D'aquesta última expressió es deriva el concepte d'*energia introduïda*.

De manera natural, l'exemple anterior motiva l'estudi de la ressonància per a oscil·ladors isòcrons més generals. Les properes seccions estan dedicades a estudiar com la condició de ressonància varia en models mecànics que generalitzen l'oscillador harmònic. Abans, però, vegem que aquest problema té sentit només en models sense dissipació energètica.

2.1.1 La dissipació d'energia esmorteix la ressonància El sistema que hem considerat inicialment a l'equació (2) no té dissipació i justament aquest és el fet pel qual la força externa amb freqüència ressonant fa que totes les solucions siguin no acotades. Si considerem que el model presenta fricció amb el medi, a l'equació del moviment hem d'afegir una força de fricció oposada al moviment, que en la majoria dels sistemes vibratoris es considera proporcional a la velocitat, $-c\dot{x}(t)$, amb $c > 0$. Si incloem aquest terme, l'equació del moviment es pot escriure com

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = 0, \quad (8)$$

on $\xi := \frac{c}{2\sqrt{mk}}$ s'anomena *coeficient dissipatiu*. Les solucions del model amb dissipació disten qualitativament de les solucions periòdiques del cas no dissipatiu. En aquest cas obtenim tres tipus de solució depenent de com de forta sigui la força de fricció. Si denotem amb $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$ la transformada de Laplace de $x(t)$, de l'equació (8) deduïm

$$X(s) = \frac{(s + 2\xi\omega)x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}.$$

Si se satisfà que $\xi \geq 1$, aleshores les arrels del polinomi $s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2$ són reals i la solució $x(t)$ de (8) s'escriu com una combinació d'exponencials. En aquest cas es diu que el sistema està *sobreesmorteït* i no hi ha moviment oscil·latori. Quan $0 < \xi < 1$, aleshores les arrels del denominador són complexes i la solució $x(t)$ pren la forma

$$x(t) = Ae^{-\xi\omega t} \cos(\varpi t + \varphi),$$

amb $\varpi = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$. Observem que, tot i ser oscil·latòria, la solució anterior tendeix a l'equilibri en avançar el temps per la presència de la dissipació, i s'obtenen el que s'anomenen *oscil·lacions esmorteïdes*.

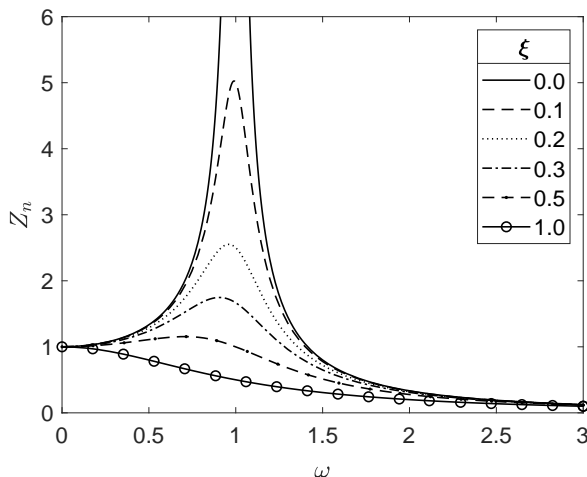


FIGURA 3: Amplitud de la part estacionària de la solució de l'oscil·lador harmònic amb paràmetres $p_1^2 + q_1^2 = 1$ i $p_n = q_n = 0$ per a $n \neq 1$. Per a cada valor de ξ , el màxim de l'amplitud Z_n s'assoleix en $\omega = \omega_r$.

De manera natural, sorgeix la pregunta de com es comporten les solucions del model amb fricció quan afegim energia al sistema de manera periòdica. Podem considerar el sistema (8) pertorbat per una funció contínua i 2π -periòdica $p(t)$,

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = p(t). \tag{9}$$

Seguint un procediment similar al del cas no dissipatiu, obtenim que les solucions de (9) es poden escriure com $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t)$, on

$$x_n(t) = e^{-\xi\omega t}(A_n \cos(\varpi t) + B_n \sin(\varpi t)) + z_n(t),$$

amb

$$z_n(t) = \frac{p_n(\omega^2 - n^2) - 2\xi\omega q_n n}{(\omega^2 - n^2)^2 + 4\xi^2\omega^2 n^2} \cos(nt) + \frac{q_n(\omega^2 - n^2) + 2\xi\omega p_n n}{(\omega^2 - n^2)^2 + 4\xi^2\omega^2 n^2} \sin(nt).$$

Les solucions de (9) tenen dues parts ben diferenciades. La primera consisteix en una part transitòria, l'associada a la part homogènia de l'equació, i que amb el pas del temps tendeix a zero a causa del terme exponencial. La segona part, $z_n(t)$, apareix a causa de la pertorbació periòdica. Observem que es tracta d'una funció 2π -periòdica, igual que en el cas no dissipatiu, amb amplitud

$$Z_n = \sqrt{\frac{p_n^2 + q_n^2}{(\omega^2 - n^2)^2 + 4\xi^2\omega^2 n^2}}.$$

En aquest cas la ressonància, però, s'entén de manera diferent. Les funcions $z_n(t)$ (i, per tant, la solució $x(t)$) són acotades. De totes maneres, observant el denominador de l'amplitud Z_n , podem veure que aquesta és màxima quan $\omega = \omega_r := n\sqrt{1 - 2\xi^2}$ (vegeu la localització del màxim en cadascuna de les corbes de la figura 3). Aquest valor rep el nom de *frequència de ressonància*, pel fet de ser la freqüència en què l'amplitud de la solució és màxima. Una observació evident és que aquesta freqüència de ressonància tendeix a la de l'oscil·lador harmònic sense fricció quan $\xi \rightarrow 0$. Però, a diferència del cas no dissipatiu, aquesta «amplitud gran» de la solució no és independent de la magnitud de la força periòdica pertorbativa. En efecte, si considerem una pertorbació petita $\epsilon p(t)$, al numerador dels coeficients de $z_n(t)$ els termes p_n i q_n passen a ser ϵp_n i ϵq_n , i podem reduir l'amplitud de la solució tant com vulguem. Aquest fet és comú en els sistemes dissipatius i és per això que no els considerarem a la resta del treball.

2.2 L'oscil·lador asimètric

Una primera generalització de l'oscil·lador lineal és l'oscil·lador asimètric. Per a la seva deducció, seguirem la construcció d'un mecanisme proposat per Ortega [31]. Com en el cas harmònic, considerem una massa m penjada d'una molla amb constant de rigidesa k_1 des d'un sostre fins a l'infinit. Denotem amb $x(t)$ el desplaçament de la massa respecte a la posició d'equilibri. Ara, considerem una segona molla, sense massa, amb constant de rigidesa k_2 de tal manera que la longitud de la molla coincideixi amb la posició d'equilibri de la primera, és a dir, $x = 0$. Aquesta segona molla no està ancorada a la massa, però considerem la massa m de tal manera que, per a $x \leq 0$, la massa té contacte amb ambdues molles de constants k_1 i k_2 , mentre que per a $x > 0$, només la primera molla amb constant k_1 exerceix força sobre la massa (vegeu la figura 4). Per deduir l'equació del moviment de la massa sota aquest artefacte mecànic, hem de considerar les dues disposicions que pot tenir. Si $x(t) > 0$, l'equació del moviment esdevé la mateixa que per a l'oscil·lador harmònic amb constant de rigidesa k_1 . Així doncs,

$$\ddot{x}(t) + \omega_1^2 x(t) = 0, \quad x(t) > 0, \quad (10)$$

amb $\omega_1 := \sqrt{\frac{k_1}{m}}$. Si $x(t) < 0$, sobre la massa actuen ambdues molles alhora. Donat que la llei de Hooke és lineal respecte a la constant de rigidesa, obtenim

$$\ddot{x}(t) + \omega_2^2 x(t) = 0, \quad x(t) < 0, \quad (11)$$

amb $\omega_2 := \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$. Podem escriure les anteriors equacions del moviment de manera més compacta posant $x^+ = \max\{0, x\}$ i $x^- = \max\{0, -x\}$, i obtenim així l'equació del moviment de l'oscil·lador asimètric

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x^+ - \omega_2^2 x^- = 0, \quad (12)$$

on hem omès la dependència temporal per simplicitat. Essencialment, es tracta d'un oscil·lador harmònic amb constant de rigidesa diferent per a $x < 0$ i per a $x > 0$.

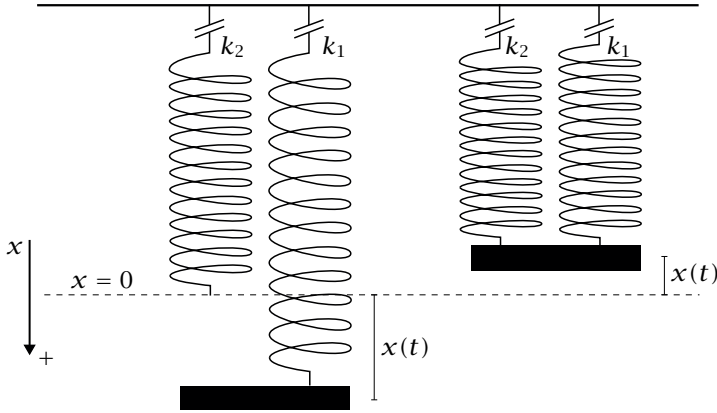


FIGURA 4: Representació d'un oscil·lador asimètric.

Lluny de semblar un artefacte acadèmic, l'oscil·lador asimètric ha mostrat la seva presència subjacent en models mecànics més complexos. N'és un exemple el model proposat per Lazer i McKenna a [20] per a un pont en suspensió. Considerem un pont de llargada L i $x \in [0, L]$ la variable que parametriza la posició horitzontal al llarg del pont. El desplaçament vertical del pont $u(t, x)$ respecte a l'horitzontal $u = 0$ (amb $u > 0$ en la direcció sota l'horitzontal) al punt x en funció del temps t satisfà l'equació diferencial d'Euler-Bernoulli de l'elàstica

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t, x) + \frac{d^4}{dx^4}u(t, x) + au^+(t, x) = f(t, x), \quad x \in [0, L], \quad (13)$$

amb condicions a la frontera $u(t, 0) = u(t, L) = \frac{d^2}{dx^2}u(t, 0) = \frac{d^2}{dx^2}u(t, L) = 0$. En l'equació anterior, observem que el factor au^+ està motivat pel fet que, en un pont en suspensió, els cables que el subjecten només interactuen (amb una força lineal segons la llei de Hooke) quan la posició vertical està per sota de l'horitzontal $u = 0$ (és a dir, $u > 0$). La funció f modela les forces externes a les quals és sotmesa cada part del pont al llarg del temps i, essencialment, està composta per dos components $f = f_1 + f_2$. El més gran, f_1 , correspon al mateix pes del pont, mentre que el segon, f_2 , és més petita i té a veure amb els efectes pertorbatius externs a causa de factors com la fricció del vent. Donada la simetria del pont i l'ancoratge a terra als punts $x = 0$ i $x = L$, la funció f es pot modelar de manera simplificada com

$$f(x, t) = (1 + \epsilon p(t)) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

Aquest fet motiva la cerca de solucions de la forma $u(t, x) = v(t) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$. En efecte, substituint $u(t, x)$ en l'equació (13) s'obté

$$\ddot{v}(t) + \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 v(t) + av^+(t) = 1 + \epsilon p(t).$$

Finalment, per a $v(t) = v^+(t) - v^-(t)$, trobem que $v(t)$ ha de satisfer l'equació diferencial de l'oscil·lador asimètric pertorbat

$$\ddot{v}(t) + \omega_1^2 v^+(t) - \omega_2^2 v^-(t) = 1 + \epsilon p(t),$$

amb $\omega_1^2 = a + \omega_2^2$ i $\omega_2^2 = (\frac{\pi}{T})^4$.

Comentàvem a l'inici de la secció que l'oscil·lador asimètric (12) és una generalització de l'oscil·lador harmònic. Per una banda, aquest fet és clar ja que coincideix amb l'oscil·lador harmònic quan $\omega_1^2 = \omega_2^2$. Però, tot i ser un oscil·lador definit a trossos, l'oscil·lador asimètric resulta ser també un oscil·lador isòcron. Això es deu al fet que a cadascuna de les dues regions separades per $x = 0$ l'oscil·lador asimètric és lineal. Considerem $x(t)$ la solució de (12) amb condicions inicials $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) > 0$. Llavors, inicialment, la dinàmica de $x(t)$ està descrita per l'equació (10). D'aquesta, sabem que trigarà exactament un temps $t_1 = \frac{\pi}{\omega_1}$ a tornar a $x = 0$. Precisament, $x(t_1) = 0$ i $\dot{x}(t_1) = -\dot{x}(0) < 0$. Amb aquestes noves condicions inicials, la dinàmica de $x(t)$ està descrita ara per l'equació (11) i trigarà exactament un temps $t_2 = \frac{\pi}{\omega_2}$ des del temps t_1 a satisfer $x(t_1 + t_2) = 0$ i $\dot{x}(t_1 + t_2) = -\dot{x}(t_1) = \dot{x}(0)$. Aquest fet no és només independent de la velocitat inicial, sinó de la posició inicial, i mostra que tota solució és periòdica de període mínim $\tau = \pi(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2})$. De fet, la solució de (12) amb condicions inicials $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$ es pot escriure explícitament com

$$x(t) = AC(t),$$

on

$$C(t) = \begin{cases} \cos(\omega_1 t), & 0 \leq |t| \leq \frac{\pi}{2\omega_1}, \\ -\frac{\omega_1}{\omega_2} \sin\left(\omega_2 \left(t - \frac{\pi}{2\omega_1}\right)\right), & \frac{\pi}{2\omega_1} < |t| \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Considerem el sistema (12) forçat externament per una funció contínua i 2π -periòdica $p(t)$,

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x^+ - \omega_2^2 x^- = p(t). \quad (14)$$

L'equació (14) va ser considerada inicialment per Dancer [10, 11] i Fučík [14, 15], interessats per l'existència de solucions periòdiques i amb condicions de frontera de Dirichlet. Considerem la família de corbes

$$\sigma := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}_+^2 : \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} = \frac{2}{n} \right\}.$$

Observem que $(\omega_1, \omega_2) \in \sigma$ si i només si totes les solucions de (12) són 2π -periòdiques. És a dir, $(\omega_1, \omega_2) \in \sigma$ generalitza la condició $\omega \in \mathbb{N}$ en el context de l'oscil·lador harmònic. De fet, $(n, n) \in \sigma$. El resultat següent és degut a Fučík [14] i mostra l'absència de ressonància de l'equació (14) quan $(\omega_1, \omega_2) \notin \sigma$.

TEOREMA 2. *Si $(\omega_1, \omega_2) \notin \sigma$, aleshores l'equació (14) té una òrbita 2π -periòdica per a qualsevol $p(t)$.*

Continuant amb l'analogia amb el cas lineal, hom esperaria que, si $(\omega_1, \omega_2) \in \sigma$, aleshores el fenomen de ressonància aparegués. Dancer ([10]) va donar exemples de pertorbacions $p(t)$ tals que l'equació (14) no té solucions 2π -periòdiques quan $(\omega_1, \omega_2) \in \sigma$. Aquest resultat pot semblar anecdòtic en el que ens ocupa si no fos pel resultat següent, conegut com a *segon teorema de Massera* [23]. Sigui

$$\dot{x} = X(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (15)$$

un camp vectorial $X: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, 2π -periòdic en t i amb regularitat suficient per suposar existència i unicitat de solucions. Denotem amb $x(t, x_0)$ la solució de (15) amb condició inicial $x(0, x_0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$.

TEOREMA 3 (SEGON TEOREMA DE MASSERA). *Si totes les solucions de (15) estan definides en el futur i una d'elles és acotada en el futur, aleshores existeix una solució 2π -periòdica.*

Aquest enunciat és més fort que l'original, que només demana existència en el futur per a solucions definides a $t_0 = 0$. De fet, la hipòtesi de l'existència d'una solució acotada en el futur es pot relaxar demanant l'existència d'una solució que satisfaci que el límit inferior de la seva norma estigui acotat en el futur. Amb això s'obté la variant del segon teorema de Massera següent.

TEOREMA 4. *Si totes les solucions de (15) estan definides en el futur i no existeixen òrbites 2π -periòdiques, aleshores*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, x_0)\| = \infty \text{ per a tot } x_0 \in \mathbb{R}^2.$$

Aquest últim resultat ens mostra que Dancer ([10]) troba pertorbacions $p(t)$ tals que l'equació (14) és ressonant quan $(\omega_1, \omega_2) \in \sigma$. També a Dancer [10] apareix per primera vegada la funció¹

$$\Psi_p(\theta) := \int_0^{2\pi} p(t)C(\theta + t) dt, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Aquesta funció resulta essencial per entendre el fenomen de ressonància de l'oscil·lador asimètric. Definim

$$\mathcal{A}(p) := \{\theta \in \mathbb{R} : \Psi_p(\theta) = 0\}.$$

Alonso i Ortega ([1]) proven el resultat següent sobre l'existència de solucions no acotades.

TEOREMA 5. *Si $(\omega_1, \omega_2) \in \sigma$ i $p \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ és tal que $\mathcal{A}(p)$ és no buit i $\Psi'_p(\theta) \neq 0$ per a tot $\theta \in \mathcal{A}(p)$, aleshores existeix $R > 0$ tal que tota solució $x(t)$ de l'equació (14) amb $x(t_0)^2 + \dot{x}(t_0)^2 > R$ per a algun $t_0 \in \mathbb{R}$ és no acotada en el futur o en el passat.*

¹ La funció originalment es denota amb Φ_p , però a les properes seccions es farà servir aquesta notació per a una altra funció similar i, amb el propòsit de comparar-les, s'ha escollit canviar-la per Ψ_p .

La notació $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ a l'enunciat anterior i en resultats subsegüents fa referència a l'espai quocient $\{x + 2\pi\mathbb{Z} : x \in \mathbb{R}\}$ on dos elements x, y estan identificats si i només si $x - y = 2\pi n$ per a algun $n \in \mathbb{Z}$. Una funció $p: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ és, per tant, una representació d'una funció 2π -periòdica en un domini acotat de longitud 2π . Aquesta notació prové de l'anàlisi harmònica per solucionar la divergència de les integrals involucrades en el càlcul de convolucions. Així, $p \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ és l'espai de funcions 2π -periòdiques integrables a $[0, 2\pi]$. És a dir,

$$\int_0^{2\pi} |p(t)| dt < +\infty.$$

Tornem al resultat del teorema 5. Per motivar la connexió amb el cas harmònic, notem que, si $\omega_1 = \omega_2 = n$, la solució de (12) esdevé $C(t) = \cos(nt)$. En aquest cas,

$$\Psi_p(\theta) = \int_0^{2\pi} p(t) \cos(n(t + \theta)) dt.$$

Per una altra banda,

$$\hat{p}_n = \frac{e^{in\theta}}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} p(t) \cos(n(t + \theta)) dt - i \int_0^{2\pi} p(t) \sin(n(t + \theta)) dt \right).$$

Per tant, en el cas lineal,

$$|\hat{p}_n|^2 = \frac{1}{4\pi^2} (\Psi_p(\theta)^2 + \Psi_p'(\theta)^2),$$

i la condició del teorema 5 és equivalent a la condició de ressonància (6) de l'oscil·lador harmònic, $|\hat{p}_n| > 0$. Tanmateix, la funció $\Psi_p(\theta)$ no té el mateix paper que \hat{p}_n en el cas lineal. Liu ([21]) i Kunze ([18]) mostren en el resultat següent que, si Ψ_p no canvia de signe, aleshores totes les solucions de (14) són acotades.

TEOREMA 6. *Si $(\omega_1, \omega_2) \in \sigma$ i $p \in C^6(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ tal que $\mathcal{A}(p) = \emptyset$, aleshores totes les solucions de l'equació (14) són acotades. És a dir, si $x(t)$ és una solució, llavors està definida per a tot $t \in \mathbb{R}$ i satisfà*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} (|x(t)| + |\dot{x}(t)|) < +\infty.$$

Per $C^k(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ entenem l'espai de funcions 2π -periòdiques amb k derivades contínues. És rellevant mencionar que la hipòtesi C^6 esdevé una condició necessària per a les tècniques emprades a la prova i és un problema obert la veracitat del resultat per a classes de funcions menys regulars.

Observem que en el cas lineal la dicotomia provocada per l'anul·lació de $|\hat{p}_n|$ determina que o bé totes les solucions són no acotades o bé són 2π -periòdiques (i, per tant, acotades). Tot i desconèixer si Ψ_p és la funció apropiada que generalitza \hat{p}_n en el cas asimètric, Alonso i Ortega proven a [1] que els dos tipus de solucions poden coexistir, com per exemple sota la pertorbació $p(t) = \cos(rt)$ amb $r \geq 1$, trencant així la similitud amb el cas continu.

2.3 Potencials isòcrons no lineals

Seguint amb la idea de generalitzar l'oscil·lador harmònic, en aquesta secció suposarem un oscil·lador no lineal isòcron

$$\ddot{x} + V'(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

definit a tota la recta real. És a dir, suposem que $x = 0$ és l'únic equilibri de l'equació i totes les solucions són periòdiques de període 2π . En la mateixa direcció que a les seccions anteriors, volem estudiar com es comporten les solucions de l'oscil·lador no lineal quan afegim una força externa petita amb el mateix període. Més concretament, volem saber com ha de ser $p(t)$ tal que totes les solucions de l'equació

$$\ddot{x} + V'(x) = \epsilon p(t) \quad (18)$$

siguin no acotades per a tot $\epsilon \neq 0$ petit.

Considerem el cilindre $\mathcal{C} = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times [0, +\infty)$ amb coordenades (θ, r) i denotem amb $\varphi(t, r)$ la solució de l'equació (17) amb condicions inicials $x(0) = r$, $\dot{x}(0) = 0$. Denotem amb $\psi(t, r)$ la solució complexa de l'equació variacional

$$\ddot{y} + V''(\varphi(t, r))y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = i.$$

Llavors definim la funció $\Phi_p: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\Phi_p(\theta, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(t - \theta) \psi(t, r) dt. \quad (19)$$

En aquesta secció demostrarem que la funció Φ_p té un paper anàleg al de \hat{p}_n per a l'oscil·lador no lineal. Primer, veurem que totes les solucions de (18) són no acotades si la condició

$$\inf_{\mathcal{C}} |\Phi_p(\theta, r)| > 0 \quad (20)$$

se satisfà. Després, veurem que, si Φ_p té un zero no degenerat, aleshores l'equació (18) té una òrbita periòdica. Aquests resultats, juntament amb altres consideracions sobre oscil·ladors isòcrons no lineals, es poden trobar a [33].

Abans de donar els enunciats i les proves d'aquests resultats, farem dues observacions. La primera és que, efectivament, la condició (20) és equivalent a la condició de ressonància lineal $|\hat{p}_n| > 0$ per a l'oscil·lador harmònic. Si prenem $V(x) = \frac{1}{2}n^2x^2$, la solució complexa de l'equació variacional és independent de r ,

$$\psi(t, r) = \cos(nt) + \frac{i}{n} \sin(nt).$$

En aquest cas,

$$\begin{aligned} \Phi_p(\theta, r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(t - \theta) \left(\cos(nt) + \frac{i}{n} \sin(nt) \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(t) \cos(n(t + \theta)) dt + \frac{i}{2\pi n} \int_0^{2\pi} p(t) \sin(n(t + \theta)) dt, \end{aligned}$$

i, per tant,

$$|\Phi_p(\theta, r)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left(\left| \int_0^{2\pi} p(t) \cos(n(t+\theta)) dt \right|^2 + \frac{1}{n^2} \left| \int_0^{2\pi} p(t) \sin(n(t+\theta)) dt \right|^2 \right).$$

Per altra banda,

$$\hat{p}_n = \frac{e^{in\theta}}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(t) e^{-in(t+\theta)} dt,$$

i llavors,

$$|\hat{p}_n|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left(\left| \int_0^{2\pi} p(t) \cos(n(t+\theta)) dt \right|^2 + \left| \int_0^{2\pi} p(t) \sin(n(t+\theta)) dt \right|^2 \right),$$

d'on obtenim la identitat $\frac{1}{n} |\hat{p}_n| \leq |\Phi_p(\theta, r)| \leq |\hat{p}_n|$.

La segona observació va en la direcció del propi plantejament del problema (17). Els dos models proposats fins ara provenen de la mecànica i són donats explícitament. Hom podria ser escèptic i pensar que no hi ha oscil·ladors isòcrons no lineals. El resultat següent es pot trobar a [32] i és una versió global de la teoria de potencials isòcrons elaborada per Urabe [39, 40], que, originàriament, era de caire local.

Donat un interval $I = (\alpha, \beta)$ amb $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq +\infty$, es defineix la classe d'Urabe $\mathcal{U}(I)$ com el conjunt de funcions $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfan $u(0) = 0$, $u \in C^0(I)$ i $v \in C^1(I)$, on $v(x) = xu(x)$.

TEOREMA 7 (TEOREMA D'URABE). *Suposem que $V \in C^2(I)$ satisfà*

$$V(0) = V'(0) = 0, \quad xV'(x) > 0 \text{ si } x \neq 0$$

i que existeix $\bar{V} \in (0, +\infty]$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} V(x) = \lim_{x \rightarrow \beta^-} V(x) = \bar{V}.$$

A més, suposem que existeix $T > 0$ tal que, per a cada $x_0 \in I$, $x_0 \neq 0$, el problema de Cauchy

$$\ddot{x} + V'(x) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

té una solució amb període mínim T . Aleshores existeix una funció senar $S \in \mathcal{U}(J)$ amb $J = (-(2\bar{V})^{\frac{1}{2}}, +(2\bar{V})^{\frac{1}{2}})$ i $|S(X)| < 1$ per a $X \in J$ tal que la solució $X(x)$ de l'equació

$$\frac{dX}{dx} = \frac{2\pi}{T} \frac{1}{1+S(X)}, \quad X(0) = 0,$$

està definida a l'interval I , on satisfà

$$V(x) = \frac{1}{2} X(x)^2.$$

El recíproc d'aquest resultat també és cert. Donada una funció $S(X)$ amb les condicions del teorema i un número $T > 0$, la funció $V(x)$ definida per les identitats del teorema satisfà les condicions de l'enunciat i, per tant, produeix un oscil·lador isòcron. Un exemple d'isòcron no lineal definit a tota la recta real és el donat per $S(X) = \alpha \arctan X$, $|\alpha| < \frac{2}{\pi}$ proposat per Ortega [30].

Una segona caracterització dels potencials isòcrons és la donada de manera independent per Zampieri [42] i per Cima, Mañosas i Villadelprat [9] en termes d'involucions. En aquest cas se suposa que la funció potencial $V(x)$ és analítica a \mathbb{R} . Diem que σ és una *involució estricta* si és una funció analítica a \mathbb{R} diferent de la identitat que satisfà $\sigma(0) = 0$ i $\sigma(\sigma(x)) = x$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

TEOREMA 8. *L'origen de l'equació $\ddot{x} + V'(x) = 0$ és un centre isòcron de període T si i només si existeix una involució estricta σ que satisfà*

$$V(x) = \frac{\pi^2}{2T^2} (x - \sigma(x))^2 \text{ per a tot } x \in \mathbb{R}.$$

2.3.1 Ressonància de l'oscil·lador no lineal global El resultat següent mostra que, si la funció potencial $V(x)$ de l'oscil·lador isòcron (17) té segona derivada acotada i $p(t)$ és una funció 2π -periòdica i localment integrable que satisfà la condició de ressonància (20), aleshores l'equació (18) és ressonant per a tot $\epsilon \neq 0$ petit.

TEOREMA 9. *Sigui $V \in C^2(\mathbb{R})$ definida a tota la recta real i que satisfà $V(0) = 0$, $xV'(x) > 0$ si $x \neq 0$. A més, suposem que totes les solucions de (17) són 2π -periòdiques. Suposem que $V''(x)$ és acotada per a tot $x \in \mathbb{R}$ i que la condició (20) se satisfà per a algun $p \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Aleshores tota solució $x(t)$ de l'equació (18) satisfà*

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} (|x(t)| + |\dot{x}(t)|) = +\infty.$$

PROVA. Per provar el resultat farem servir la variant del segon teorema de Massera enunciat al teorema 4. L'estratègia serà provar que no existeixen òrbites 2π -periòdiques que siguin solució de (18) per a $\epsilon \neq 0$ petit. Abans, però, necessitem estudiar un parell de propietats de l'equació lineal

$$\ddot{y} + a(t)y = b(t), \tag{21}$$

amb $a \in L^\infty(0, 2\pi)$, $b \in L^1(0, 2\pi)$ i $\|a\|_{L^\infty(0, 2\pi)} \leq K$.

- (i) Siguin $u(t)$ i $v(t)$ les dues solucions funcionalment independents de l'equació (21) amb $b \equiv 0$ amb condicions inicials $u(0) = \dot{v}(0) = 1$ i $\dot{u}(0) = v(0) = 0$. Aleshores existeix una constant $C > 0$, dependent només de K , tal que $(u(t)^2 + v(t)^2)^{\frac{1}{2}} \leq C$ per a tot $t \in [0, 2\pi]$.
- (ii) Sigui $y(t)$ la solució de l'equació (21) amb condicions inicials $y(0) = \dot{y}(0) = 0$. Aleshores $|y(t)| \leq C^2 \|b\|_{L^1(0, 2\pi)}$ per a tot $t \in [0, 2\pi]$.

En efecte, per provar (i) observem que la matriu $\Phi(t) = \begin{pmatrix} u & v \\ \dot{u} & \dot{v} \end{pmatrix}$ és una solució del sistema lineal $\dot{Y} = A(t)Y$ amb $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix}$. Per la desigualtat de Gronwall,

$$\|\Phi(t)\| \leq \exp\left(\int_0^t \|A(s)\| ds\right),$$

on $\|\cdot\|$ denota la norma de matrius induïda per la norma del suprem de \mathbb{R}^2 . És a dir, donada una matriu $A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R})$, $\|A\| = \max\{|a_{11}| + |a_{12}|, |a_{21}| + |a_{22}|\}$. Donat que $\|a\|_{L^\infty(0,2\pi)} \leq K$, $\|A(t)\| \leq \max\{1, K\} = M$. Llavors, $\|\Phi(t)\| \leq e^{2\pi M}$ per a tot $t \in [0, 2\pi]$, la qual cosa prova (i). Per veure (ii), aplicant la fórmula de variació de constants, es té

$$y(t) = \int_0^1 (v(t)u(s) - v(s)u(t))b(s) ds.$$

Utilitzant la desigualtat de Cauchy-Schwarz juntament amb (i) obtenim

$$|v(t)u(s) - v(s)u(t)| \leq (u(t)^2 + v(t)^2)^{\frac{1}{2}}(u(s)^2 + v(s)^2)^{\frac{1}{2}} \leq C^2.$$

Amb la intenció d'arribar a contradicció, suposem que existeix una successió $\{\epsilon_n\}$ amb $\epsilon_n \neq 0$ i $\epsilon_n \rightarrow 0$ tal que l'equació (18) té una solució 2π -periòdica $x_n(t)$ per a $\epsilon = \epsilon_n$. Denotem amb $X_n(t)$ la solució de l'oscil·lador isòcron (17) amb les mateixes condicions inicials que $x_n(t)$ a $t = 0$. És a dir, $X_n(0) = x_n(0)$ i $\dot{X}_n(0) = \dot{x}_n(0)$. Observem que això és possible ja que l'isòcron (17) és global. Considerem la diferència $y_n(t) = x_n(t) - X_n(t)$. Per una banda, la funció $y_n(t)$ és solució de l'equació lineal

$$\ddot{y} + a(t)y = b(t), \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0,$$

amb

$$a(t) = \int_0^1 V''((1-\lambda)x_n(t) + \lambda X_n(t)) d\lambda, \quad b(t) = \epsilon_n p(t).$$

En efecte, es pot comprovar directament fent servir que $X_n(t)$ és solució de (17), $x_n(t)$ és solució de (18) i, pel teorema del valor mitjà,

$$\frac{V'(x_n(t)) - V'(X_n(t))}{y_n(t)} = a(t).$$

Per la propietat (ii) deduïm que

$$\|y_n\|_{L^\infty(0,2\pi)} \leq C^2 |\epsilon_n| \|p\|_{L^1(0,2\pi)}, \quad (22)$$

on fem servir $K = \sup_{x \in \mathbb{R}} |V''(x)|$.

Per altra banda, la funció $y_n(t)$ també és solució 2π -periòdica de l'equació lineal

$$\ddot{y} + V''(X_n(t))y = \epsilon_n p(t) - q_n(t),$$

amb

$$q_n(t) = y_n(t) \int_0^1 [V''((1-\lambda)x_n(t) + \lambda X_n(t)) - V''(X_n(t))] d\lambda.$$

Cal observar que els coeficients d'aquesta equació són 2π -periòdics perquè l'oscil·lador (17) és isòcron. Totes les solucions de (17) són del tipus $\varphi(t - \theta, r)$. En particular, $X_n(t) = \varphi(t - \theta_n, r_n)$ per a algun $\theta_n \in [0, 2\pi]$ i $r_n \geq 0$. La funció $\psi(t - \theta_n, r_n)$ és una solució 2π -periòdica no trivial de l'equació homogènia $\dot{y} + V''(X_n(t))y = 0$. Aleshores, per l'alternativa de Fredholm,

$$\epsilon_n \int_0^{2\pi} p(t)\psi(t - \theta_n, r_n) dt - \int_0^{2\pi} q_n(t)\psi(t - \theta_n, r_n) dt = 0.$$

Altrament,

$$\Phi_p(\theta_n, r_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q_n(t)}{\epsilon_n} \varphi(t - \theta_n, r_n) dt.$$

Fent servir la cota (22) i la definició de $q_n(t)$, el teorema de convergència dominada implica $\frac{1}{\epsilon_n} q_n(t) \rightarrow 0$ quan $n \rightarrow +\infty$ per a tot $t \in [0, 2\pi]$. Per la propietat (i) sabem que $\|\psi(\cdot, r_n)\|_{L^\infty(0, 2\pi)} \leq C$ i, juntament amb la cota (22), tenim que

$$\frac{\|q_n\|_{L^\infty(0, 2\pi)}}{|\epsilon_n|} \leq 2C^2 \|p\|_{L^1(0, 2\pi)} \|V''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Fent servir de nou la convergència dominada, $\Phi_p(\theta_n, r_n) \rightarrow 0$ quan $n \rightarrow +\infty$. Això és incompatible amb la condició de ressonància (20) i prova el teorema. \square

El teorema 9 és una condició suficient per a la ressonància de l'equació (18), però, de fet, no està gaire lluny d'ésser també necessària. El resultat següent mostra la validesa d'un recíproc parcial del resultat anterior: una solució periòdica existeix quan la funció Φ_p té un zero no degenerat. Aquesta condició de no degeneració és en el sentit de la teoria de grau de Brouwer. Sigui Ω un subconjunt obert i acotat de \mathbb{R}^d i $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ una funció contínua que no s'anulla a la frontera de Ω . Primer suposem que $f \in C^1(\bar{\Omega})$ i té un nombre finit de zeros $x_1, \dots, x_n \in \Omega$ amb $\det f'(x_i) \neq 0$ per a cada $i = 1, \dots, n$. Aleshores el grau de Brouwer de f en Ω és

$$\deg(f, \Omega) = \sum_{i=1}^n \text{sign det } f'(x_i).$$

Si f és contínua, pot ser aproximada per funcions f_k en les condicions anteriors i definim

$$\deg(f, \Omega) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \deg(f_k, \Omega).$$

Diem, doncs, que un zero $x \in \Omega$ de f és *no degenerat* si existeix un obert \mathcal{U} de $x \in \Omega$ tal que $f(y) \neq 0$ per a tot punt $y \in \bar{\mathcal{U}} \setminus \{x\}$ i el grau de Brouwer $\deg(f, \mathcal{U})$ no s'anulla.

Una propietat important del grau de Brouwer és la seva invariància per homotopia i té un paper clau en la prova del resultat següent.

TEOREMA 10. *Sigui V en les condicions del teorema 9 i suposem que Φ_p té un zero no degenerat (θ_*, r_*) amb $r_* > 0$. Aleshores l'equació (18) té una solució 2π -periòdica per a tot ϵ petit.*

PROVA. Denotem amb $x(t; x_0, v_0, \epsilon)$ la solució de l'equació (18) amb condicions inicials $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ i definim

$$\Delta(t; x_0, v_0, \epsilon) := \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} [x(t; x_0, v_0, \epsilon) - x(t; x_0, v_0, 0)] & \text{si } \epsilon \neq 0, \\ \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(t; x_0, v_0, 0) & \text{si } \epsilon = 0. \end{cases}$$

Per a cada $\epsilon \in \mathbb{R}$ considerem l'aplicació al pla $\mathcal{F}_\epsilon: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida per

$$\mathcal{F}_\epsilon(x_0, v_0) = (\Delta(2\pi; x_0, v_0, \epsilon), \dot{\Delta}(2\pi; x_0, v_0, \epsilon)).$$

La idea d'aquesta prova és veure que \mathcal{F}_0 té un zero no degenerat en el sentit de la teoria de grau de Brouwer. Aquest fet implica que per a $\epsilon \neq 0$ petit l'aplicació \mathcal{F}_ϵ també té un zero. Observem que, per a cada ϵ , un zero de l'aplicació \mathcal{F}_ϵ correspon a una solució 2π -periòdica de l'equació (18).

Com que l'equació (17) és isòcrona de període 2π , tota solució no trivial té període mínim $\frac{2\pi}{n}$ per a algun $n \in \mathbb{N}$. La funció $\psi(\cdot, r)$, solució de l'equació variacional, té període $\frac{2\pi}{n}$ i l'aplicació

$$\tilde{\Phi}_p(\theta, r) := \Phi_p\left(\frac{\theta}{n}, r\right)$$

està ben definida al cilindre \mathcal{C} . L'aplicació $(\theta, r) \mapsto (n\theta, r)$ és un difeomorfisme local en el cilindre obert $\mathcal{C} = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times (0, \infty)$. Sigui (θ_*, r_*) el zero no degenerat de Φ_p de les hipòtesis del teorema. Aleshores $(n\theta_*, r_*)$ és un zero no degenerat de $\tilde{\Phi}_p$ per la definició del grau de Brouwer.

Considerem el difeomorfisme

$$\eta: (\theta, r) \in \mathcal{C} \mapsto (\varphi(-\frac{\theta}{n}, r), \dot{\varphi}(-\frac{\theta}{n}, r)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

La funció $y(t) = \Delta(t; \eta(\theta, r), 0)$ és la solució del problema de valor inicial

$$\dot{y} + V''(\varphi(t - \frac{\theta}{n}, r))y = p(t), \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

Aleshores, per la fórmula de variacions de constants,

$$\begin{pmatrix} \Delta(t; \eta(\theta, r), 0) \\ \dot{\Delta}(t; \eta(\theta, r), 0) \end{pmatrix} = M(t - \frac{\theta}{n}) \int_0^t \begin{pmatrix} u(s - \frac{\theta}{n}) \\ v(s - \frac{\theta}{n}) \end{pmatrix} p(s) ds,$$

on $M = \begin{pmatrix} v & -u \\ \dot{v} & -\dot{u} \end{pmatrix}$ i $u(t, r) = \operatorname{Re} \psi(t, r)$, $v(t, r) = \operatorname{Im} \psi(t, r)$, amb $\psi(t, r)$ la solució de l'equació variacional $\dot{y} + V''(\varphi(t, r))y = 0$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = i$. En conseqüència,

$$(\mathcal{F}_0 \circ \eta)(\theta, r) = 2\pi M(-\frac{\theta}{n}, r) \tilde{\Phi}_p(\theta, r).$$

Notem que aquí estem identificant \mathbb{C} i \mathbb{R}^2 , de tal manera que $\tilde{\Phi}_p$ pren valors a \mathbb{R}^2 . La matriu M té determinant 1 i, en conseqüència, els zeros de les funcions $\mathcal{F}_0 \circ \eta$ i $\tilde{\Phi}_p$ coincideixen. Per a cada $\lambda \in [0, 1]$ definim $H_\lambda: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ com

$$H_\lambda(\theta, r) = M(-\frac{\lambda\theta}{n}, r) \tilde{\Phi}_p(\theta, r).$$

Observem que $H_0 = J\tilde{\Phi}_p$ i $H_1 = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_0 \circ \eta$, amb $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. A més, els zeros de H_λ són independents de λ . Concloem, doncs, per la propietat d'invariància per homotopia del grau de Brouwer, que $(n\theta_*, r_*)$ és un zero no degenerat de $\mathcal{F}_0 \circ \eta$. Aleshores, $(x_0^*, v_0^*) = \eta(n\theta_*, r_*)$ és un zero no degenerat de \mathcal{F}_0 . Per la discussió inicial, això prova el resultat. \square

2.3.2 L'oscil·lador de Pinney com a prototip amb singularitat Tant l'equació de l'oscil·lador lineal com les de l'asimètric i el no lineal que s'han considerat estaven definides a tota la recta real. En particular, el seu espai de fase és tot \mathbb{R}^2 . Existeixen, però, centres isòcronos produïts per potencials amb singularitats que estan definits en una semirecta pròpia i, per tant, l'espai de fase és un semiplà. Un exemple ben conegut és l'oscil·lador de Pinney [34] (vegeu la figura 5),

$$\ddot{x} + \frac{1}{4} \left(x + 1 - \frac{1}{(x+1)^3} \right) = 0, \quad x \in (-1, +\infty). \quad (23)$$

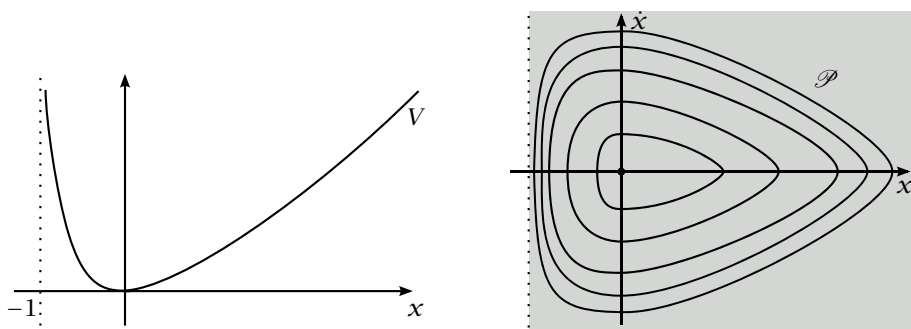


FIGURA 5: A l'esquerra, la funció potencial de Pinney amb singularitat a $x = -1$. A la dreta, el retrat de fase del sistema potencial. La zona ombrrejada correspon a l'anell de períodes, en aquest cas el semiplà $x > -1$.

L'equació de Pinney és també coneguda com a equació d'Ermakov-Pinney per ser un cas particular d'una família més general de sistemes integrables donats per Ermakov [12], tot i que, per ser justos, la primera aparició d'aquesta equació és d'un article de Steen en danès publicat l'any 1874. Es recomana llegir [35] per a un resum històric de l'equació. Tornant a Pinney, a [34] es dona una expressió explícita de les solucions amb condicions inicials $x(0) = r$, $\dot{x}(0) = 0$. En particular,

$$\varphi(t, r) = -1 + \sqrt{(1+r)^2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{(1+r)^2} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Observem que totes les solucions són periòdiques de període 2π . L'equació (23) resulta no ser només un exemple: Chalykh i Veselov a [8] demostren que l'oscil·lador de Pinney i l'oscil·lador lineal són els únics isòcronos racionals llevat de translació, suma d'una constant i rescalat. Per aquest motiu, és natural

preguntar-nos com es comporten les solucions de (23) quan hi afegim una pertorbació externa 2π -periòdica.

El resultat següent respon a aquesta pregunta. Denotem amb $\psi(t, r)$ la solució complexa de l'equació variacional

$$\ddot{y} + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3}{(\varphi(t, r) + 1)^4} \right) y = 0,$$

amb condicions inicials $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = i$. Es pot comprovar que

$$\psi(t, r) = \frac{\cos^2(\frac{t}{2}) - \frac{1}{(1+r)^4} \sin^2(\frac{t}{2}) + 2i \sin(\frac{t}{2}) \cos(\frac{t}{2})}{\sqrt{\cos^2(\frac{t}{2}) + \frac{1}{(1+r)^4} \sin^2(\frac{t}{2})}}. \quad (24)$$

TEOREMA 11. *Si $p \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ una funció que satisfà la condició de ressonància (20) amb $\psi(t, r)$ definida a (24). Aleshores totes les solucions de l'equació*

$$\ddot{x} + \frac{1}{4} \left(x + 1 - \frac{1}{(x+1)^3} \right) = \epsilon p(t) \quad (25)$$

són no acotades per a tot $\epsilon \neq 0$ petit.

En general, comprovar la condició de ressonància no lineal (20) per a un oscil·lador isòcron qualsevol pot ser molt difícil. En el cas de l'oscil·lador de Pinney, això és possible quan la pertorbació periòdica és lineal en $\sin(t)$ i $\cos(t)$.

COROLLARI 12. *Si $p(t) = a_0 + a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t)$, l'equació (25) és ressonant quan $a_1^2 + b_1^2 > 9a_0^2$.*

2.3.3 Ressonància d'un isòcron acotat Fins ara tots els oscil·ladors tractats han estat isòcrons globals. És a dir, totes les solucions de les equacions són ben definides i 2π -periòdiques. Un fenomen no gaire comú però possible és el cas d'oscil·ladors isòcrons acotats. En general, un centre acotat al pla acostuma a estar confinat a la regió delimitada per una òrbita homoclínica o heteroclínica. Aquesta situació és incompatible amb la isocronia, ja que en ambdós casos almenys un equilibri es troba a la frontera de l'anell de períodes i, per continuïtat, el període de les solucions properes a aquesta frontera ha de créixer cap a l'infinit. Malgrat això, és possible construir centres isòcrons acotats fent servir funcions potencials amb singularitats. Per tal de diferenciar-ho del cas de l'oscil·lador de Pinney, aquesta singularitat ha de ser integrable. És a dir, l'equació

$$\ddot{x} + V'(x) = 0$$

ha de ser singular, però el hamiltonià $H(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$ ha de ser regular. En aquest cas es diu que l'equació diferencial té una singularitat dèbil.

En primera instància, l'existència d'oscil·ladors isòcrons acotats podria semblar estranya. Tanmateix, la caracterització d'isòcrons d'Urabe presentada

al teorema 7 és una molt bona eina per crear-ne. De fet, segons aquest resultat, hi ha tants oscil·ladors isòcrons acotats com funcions senars $S \in C(I) \cap C^1(I \setminus \{0\})$ amb $I = (\alpha, \beta)$, $\alpha < 0 < \beta$, que satisfan $S(\alpha) + 1 = 0$. L'exemple més senzill que satisfà aquestes característiques és la funció identitat, $S(X) = X$, la qual, fent servir el teorema 7, produeix l'oscil·lador isòcron acotat

$$\ddot{x} + 1 - \frac{1}{\sqrt{1+2x}} = 0, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right). \quad (26)$$

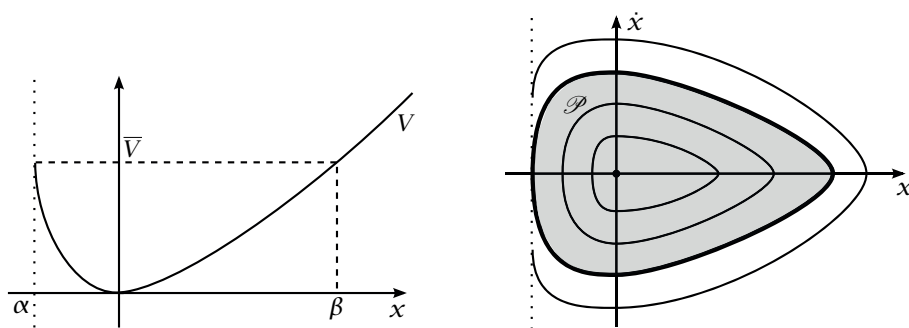


FIGURA 6: A l'esquerra, funció potencial amb singularitat dèbil a $x = \alpha$. A la dreta, retrat de fase del sistema potencial. La zona ombrejada correspon a l'anell de períodes. La seva frontera està emfatitzada en negra.

L'anterior exemple és una mostra d'oscil·lador isòcron acotat, però durant la resta de la secció considerarem el cas genèric.

Suposem que $V \in C^2(I)$ és una funció potencial definida a l'interval $I = (\alpha, +\infty)$ amb $-\infty < \alpha < 0$ que satisfà $V(0) = V'(0) = 0$ i $xV'(x) > 0$ si $x \neq 0$. A més, suposem que

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} V(x) = \lim_{x \rightarrow \beta^-} V(x) = \bar{V} < +\infty, \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow \alpha^+} V'(x) = +\infty,$$

amb $0 < \beta < +\infty$. Sota aquestes condicions, l'equació

$$\ddot{x} + V'(x) = 0, \quad x \in I,$$

té un centre a l'origen amb anell de períodes \mathcal{P} acotat (vegeu la figura 6). És important observar que les solucions fora de \mathcal{P} no estan definides globalment ja que presenten una col·lisió amb la singularitat $x = \alpha$ en temps finit.

Suposem que totes les solucions periòdiques contingudes a \mathcal{P} són 2π -periòdiques i, per a cada $\epsilon > 0$, denotem amb $\varphi_\epsilon(t, (x_0, \dot{x}_0))$ la solució de l'isòcron acotat pertorbat periòdicament

$$\ddot{x} + V'(x) = \epsilon p(t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad (27)$$

amb $(x_0, \dot{x}_0) \in \mathcal{P}$. A més, denotem amb

$$\varphi_\epsilon(t, \mathcal{U}) := \{\varphi_\epsilon(t, (x_0, \dot{x}_0)) : (x_0, \dot{x}_0) \in \mathcal{U}\}$$

el conjunt de totes les solucions de l'equació (27) amb condicions inicials al subconjunt $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}$. En aquest cas, el cilindre sobre el qual es defineix la funció Φ_p introduïda a (19) és acotat. En efecte, considerem $\mathcal{C} = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times [0, \beta)$ amb coordenades (θ, r) . La resta de funcions són definides de la mateixa manera que en el cas global. El resultat de ressonància per a l'isòcron acotat és el següent.

TEOREMA 13. *Suposem que V satisfà les condicions anteriors i sigui $p \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ que satisfà la condició de ressonància (20). Aleshores, per a cada subconjunt compacte $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}$ amb interior no buit i $d > 0$ existeix $\epsilon^* > 0$ tal que, si $0 < \epsilon < \epsilon^*$, llavors tota bola oberta de condicions inicials $B \subset \mathcal{K}$ amb diàmetre d satisfà $\varphi_\epsilon(t, B) \not\subset \mathcal{K}$ per a algun temps $t > 0$.*

Observem que aquest resultat és bastant diferent dels obtinguts fins ara quant a ressonància. El fet que l'anell de períodes, en què les solucions 2π -periòdiques estan definides globalment, sigui acotat fa que el resultat de ressonància en aquest cas s'hagi d'entendre com un resultat d'escapada de l'anell. Més concretament, el que s'afirma és l'existència d'algun moment en el qual s'abandona l'anell de períodes. Però això no treu que les solucions puguin tornar eventualment.

Tant en el teorema 9, en què es tracta la ressonància de l'oscil·lador no lineal global, com en el teorema 11, en què es tracta l'oscil·lador de Pinney, l'eina clau per provar els resultats és la variant del segon teorema de Massera presentada al teorema 4. En aquest cas, tal com s'ha comentat abans, no totes les solucions estan definides en el futur. Això impossibilita fer servir la mateixa estratègia que en els casos anteriors. En comptes del segon teorema de Massera, l'eina clau en aquest resultat és el següent teorema de punt fix de Montgomery (vegeu [31, secció 3.9]).

TEOREMA 14 (TEOREMA DE PUNT FIX DE MONTGOMERY). *Siguin $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunt obert i simplement connex amb mesura finita i $h: \Delta \rightarrow \Delta$ un homeomorfisme que preserva l'orientació i l'àrea. Aleshores h té un punt fix.*

La primera part de la prova del teorema 13 és anàloga a la del teorema 9: consisteix a provar la no existència d'òrbites 2π -periòdiques. En aquest cas, en comptes de no existència global, la no existència es dona per a compactes dins l'anell de períodes.

PROPOSICIÓ 15. *Sota les hipòtesis del teorema 13, per a tot subconjunt compacte $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}$ amb no interior buit no existeix cap solució 2π -periòdica de l'equació (27) continguda a \mathcal{K} per a $\epsilon \neq 0$ petit.*

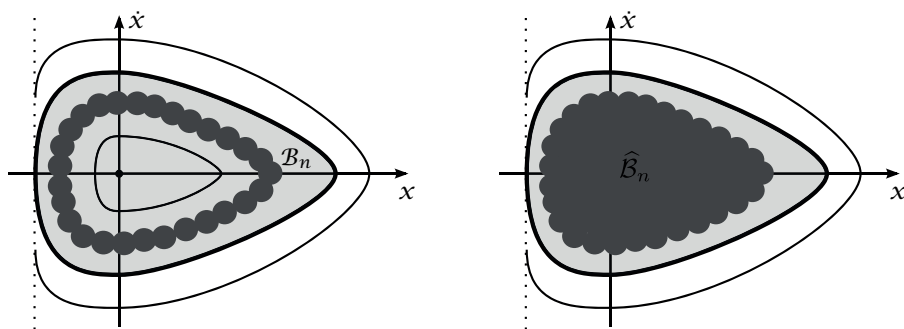


FIGURA 7: A l'esquerra, representació del conjunt B_n . A la dreta, representació del conjunt \hat{B}_n .

No és restrictiu pensar que \mathcal{K} és un subconjunt compacte simplement connex. Considerem la família d'aplicacions de Poincaré

$$P_\epsilon: \mathcal{K} \rightarrow (\alpha, +\infty) \times \mathbb{R}$$

definides per $P_\epsilon((x_0, \dot{x}_0)) = \varphi_\epsilon(2\pi, (x_0, \dot{x}_0))$. Com que per a $\epsilon = 0$ totes les solucions de l'equació (27) amb condicions inicials contingudes a \mathcal{P} són definides globalment, podem assegurar l'existència de $\epsilon^{**} > 0$ tal que, si $0 < \epsilon < \epsilon^{**}$, aleshores totes les solucions de l'equació (27) amb condicions inicials contingudes a \mathcal{K} estan ben definides per a $t \in [0, 2\pi]$.

Per provar el teorema 13 procedim per reducció a l'absurd i suposem que existeix una successió $\{\epsilon_n\}_{n \geq 0}$, $\epsilon_n \rightarrow 0$, que satisfà $0 < \epsilon_n < \epsilon^{**}$ tal que per a cada $\epsilon = \epsilon_n$ existeix una bola oberta de condicions inicials $B_n \subset \mathcal{K}$ amb diàmetre $d > 0$ que es manté dins de \mathcal{K} sota l'acció del flux positiu de l'equació (27). És a dir, $\varphi_{\epsilon_n}(t, B_n) \subset \mathcal{K}$ per a tot $t > 0$. En particular, $P_{\epsilon_n}^m \subset \mathcal{K}$ per a tot $m \geq 1$. Donat que l'aplicació de Poincaré P_{ϵ_n} convergeix a la identitat uniformement sobre subconjunts compactes quan $n \rightarrow +\infty$ i, donat que el diàmetre de la bola B_n és fix, existeix $0 < \epsilon^* < \epsilon^{**}$ tal que, si $0 < \epsilon_n < \epsilon^*$, aleshores $P_{\epsilon_n}(B_n) \cap B_n \neq \emptyset$. A més, com que P_{ϵ_n} és injectiva, tenim que $P_{\epsilon_n}^{m+1}(B_n) \cap P_{\epsilon_n}^m(B_n) \neq \emptyset$ per a cada enter $m \geq 0$. En particular, la unió de tots els iterats de l'aplicació de Poincaré de B_n ,

$$\mathcal{B}_n := \bigcup_{m \geq 0} P_{\epsilon_n}^m(B_n),$$

és un subconjunt obert simplement connex i positivament invariant sota l'acció de l'aplicació P_{ϵ_n} . És a dir, $P_{\epsilon_n}(\mathcal{B}_n) \subset \mathcal{B}_n$ (vegeu la figura 7 esquerra).

Per tal d'aplicar el teorema de punt fix de Montgomery, necessitem que el conjunt Δ sigui invariant per l'homeomorfisme h . En aquest cas, seguint [31, lema 17], veiem que la invariància la podem obtenir prenent el conjunt $\text{int}(\overline{\mathcal{B}_n})$,

on $\text{int}(\mathcal{U})$ denota l'interior del subconjunt \mathcal{U} . El conjunt obert $\text{int}(\overline{\mathcal{B}_n})$ és connex i invariant per l'acció de P_{ϵ_n} , però no és necessàriament simplement connex. Per superar aquest obstacle, considerem $\hat{\mathcal{B}}_n$ el conjunt obert simplement connex format per $\text{int}(\overline{\mathcal{B}_n})$ i els seus possibles forats plens (vegeu la figura 7 dreta).

Amb aquesta construcció, $\hat{\mathcal{B}}_n$ és un subconjunt obert simplement connex invariant sota l'acció de l'aplicació P_{ϵ_n} . A més, $\hat{\mathcal{B}}_n$ té mesura finita ja que està contingut dins del compacte \mathcal{K} , que és simplement connex. Podem, doncs, aplicar el teorema del punt fix de Montgomery per concloure que P_{ϵ_n} té un punt fix a $\hat{\mathcal{B}}_n$. Aquest punt fix clarament correspon a l'existència d'una solució 2π -periòdica de (27) per a $\epsilon = \epsilon_n$ continguda a \mathcal{K} , la qual cosa contradiu la proposició 15 i prova l'enunciat del teorema 13.

De manera similar al cas de l'oscil·lador de Pinney, el teorema 13 es pot aplicar efectivament en l'exemple (26) quan es pertorba amb una funció periòdica lineal en $\sin(t)$ i $\cos(t)$.

COROLLARI 16. *Suposant que $p(t) = a_0 + a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t)$, l'equació (26) és ressonant en subconjunts compactes si*

$$a_1^2 + b_1^2 > \frac{9a_0^2}{4(J_1(1) - J_2(1))^2},$$

on $J_\nu(x)$ denota la funció de Bessel de primer tipus.

2.4 Generalització de l'oscil·lador asimètric: el cas no lineal

De la mateixa manera que els resultats anteriors generalitzen la condició de ressonància de l'oscil·lador harmònic, sembla natural preguntar-se si el mateix succeeix amb l'oscil·lador asimètric. Mañosas i Torres a [22] proven l'existència d'oscil·ladors asimètrics no lineals. Sigui $F(x) = \frac{a}{2}x^2 + O(x^3)$ i $G(x) = \frac{b}{2}x^2 + O(x^3)$, $a, b > 0$, funcions analítiques definides a un entorn de $x = 0$. Es defineix el sistema a trossos²

$$\begin{cases} \ddot{x} + F'(x) = 0 & \text{si } x \geq 0, \\ \ddot{x} + G'(x) = 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (28)$$

TEOREMA 17. *Sigui $F(x) = \frac{a}{2}x^2 + O(x^4)$ una funció parella i analítica a $x = 0$. Aleshores, per a cada $b > 0$ existeix una única funció G parella i analítica a $x = 0$ tal que $G(x) = \frac{b}{2}x^2 + O(x^4)$ i el sistema (28) té un centre isòcron a l'origen de període*

$$\tau = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right).$$

² El sistema original a [22] està definit a trossos respecte a la velocitat $\dot{x} = 0$, en comptes de la posició $x = 0$ que hem fet servir a (28). En aquest article s'ha considerat l'escriptura respecte a $x = 0$ per poder fer una comparació més senzilla amb l'oscil·lador asimètric lineal (10)-(11). El teorema 17 se segueix de la mateixa prova del sistema original a [22].

Observem que, en efecte, el resultat anterior generalitza l'existència de l'oscil·lador asimètric (12) en el cas no lineal prenent $a = \omega_1^2$ i $b = \omega_2^2$. Fins on l'autor d'aquest article coneix, el problema de ressonància en l'oscil·lador asimètric no lineal encara no ha estat abordat. Sembla raonable que, adequant les tècniques que s'han fet servir per a l'oscil·lador asimètric lineal, es pogués arribar a resultats similars als d'aquest.

2.5 Resultats de ressonància per a hamiltonians més generals

Els sistemes potencials tractats fins ara són casos particulars de sistemes hamiltonians. Tant el fenomen d'isocronia com el problema de ressonància no són exclusius dels sistemes potencials i alguns dels resultats que s'han vist fins ara poden estendre's a hamiltonians més generals.

Considerem $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , positiva i positivament homogènia de grau 2. És a dir, per a tot $u \in \mathbb{R}^2$ i $\lambda > 0$, $H(\lambda u) = \lambda^2 H(u)$ i $\min_{\|u\|=1} H(u) > 0$. A més, suposem que el gradient ∇H és Lipschitz continu. En aquestes condicions, el sistema hamiltonià

$$\dot{u} = J\nabla H(u), \quad (29)$$

amb $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, té un centre isòcron a l'origen. Denotem amb τ el període del centre isòcron i considerem, amb l'esperit de generalitzar els escenaris anteriors, el sistema hamiltonià pertorbat periòdicament

$$\dot{u} = J\nabla H(u) + p(t), \quad (30)$$

amb $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ contínua i 2π -periòdica. Fonda, a [13], prova, sota les anteriors condicions, que, si $\frac{2\pi}{\tau} \notin \mathbb{N}$, aleshores el sistema (30) té una solució 2π -periòdica per a qualsevol pertorbació $p(t)$. A més, prova que, si $\frac{2\pi}{\tau} \in \mathbb{N}$, aleshores existeix una pertorbació 2π -periòdica $p(t)$ tal que totes les solucions del sistema (30) són no acotades.

Amb l'esperit de caracteritzar les pertorbacions que produeixen ressonància, Fonda introdueix la funció³ de ressonància $\Psi_p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ associada a (30) definida per

$$\Psi_p(\theta) := \int_0^{2\pi} \langle p(t) | \varphi(t + \theta) \rangle dt, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (31)$$

on φ és la solució del sistema isòcron (29) tal que $H(\varphi(t)) = \frac{1}{2}$. La funció Ψ_p és contínua i τ -periòdica i serveix com a criteri de ressonància del sistema (30), com es mostra als dos resultats següents.

TEOREMA 18. *Sigui $p \in C^6(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Suposem que $\frac{2\pi}{\tau} \in \mathbb{N}$ i que Ψ_p no canvia de signe. Aleshores, totes les solucions de (30) són acotades.*

TEOREMA 19. *Sigui $\frac{2\pi}{\tau} \in \mathbb{N}$ i suposem que Ψ_p canvia de signe almenys quatre vegades a l'interval $[0, \tau)$, amb tots els zeros simples. Aleshores, el sistema (30) té una solució 2π -periòdica, mentre que totes les solucions amb condicions inicials prou grans són no acotades.*

³ De nou s'ha canviat la notació original per evitar confusió a l'hora de comparar-la amb Φ_p definida a (19).

Notem la similitud d'aquests dos darrers enunciats amb els teoremes 5 i 6 per a l'oscil·lador asimètric. A més, la funció Ψ_p a (31) està definida sobre una solució del sistema isòcron, tal com es defineix la funció de ressonància per a l'oscil·lador asimètric (16). Aquests fets motiven l'elecció de la mateixa notació per a ambdues.

Fins on arriben els coneixements de l'autor, no hi ha resultats de ressonància per a hamiltonians en les condicions de l'inici de la secció fent servir una funció de ressonància anàloga a la definida per a l'oscil·lador no lineal (19). És a dir, fent servir la solució de les equacions variacionals en comptes de la solució de l'isòcron. Semblaria possible trobar generalitzacions dels resultats de ressonància dels potencials no lineals en el marc dels hamiltonians isòcrons.

3 Ressonància autoparamètrica

En aquesta secció visitarem un concepte de ressonància una mica diferent dels anteriors. Fins ara hem fet servir el concepte de ressonància associat al fet que totes o una gran quantitat de les solucions d'un model són no acotades i produeixen grans oscil·lacions. Aquest fet anava de la mà de la congruència entre la freqüència de l'oscil·lador i la de la pertorbació periòdica externa. Moltes vegades, el mateix fet d'aquesta congruència rep el nom de *ressonància*, independentment del comportament (local o global) de les solucions. En aquesta secció veurem que hi ha models en els quals tenim dos modes d'oscil·lació (és a dir, dos tipus d'oscil·lació propis) i el sistema pot presentar ressonància intrínsecament sense necessitat de forces externes.

Un exemple clàssic és el pèndol de longitud variable (o pèndol-molla), presentat per Olsson a [29]. Quan la massa del pèndol-molla s'escull de tal manera que la molla s'estira un terç de la seva longitud sense massa per assolir la posició d'equilibri, petites oscil·lacions verticals de la molla es tornen inestables i l'oscil·lador passa de vibrar en el mode harmònic a vibrar en el mode pèndol. Aquest fet es coneix com a *ressonància autoparamètrica* i esdevé conseqüència de la inestabilitat d'un dels modes d'oscil·lació. Aquest fenomen es pot visualitzar, per exemple, al vídeo [28] del canal de Youtube *Steve Mould*. A les properes seccions visitarem aquest exemple i el relacionarem amb un model del pont de Tacoma-Narrows presentat per Arioli i Gazzola a [3].

3.1 Pèndol amb longitud variable

Considerem una molla de longitud ℓ_0 en repòs ancorada al sostre i hi pengem una massa m de l'extrem inferior. Tal com vam veure a la secció 2.1, la molla s'estira a causa del pes de la massa i assoleix una nova longitud d'equilibri

$$z_0 = \ell_0 + \frac{mg}{k}. \quad (32)$$

Denotem amb $x(t)$ i $z(t)$ les desviacions horitzontal i vertical, respectivament, de la posició d'equilibri tal com es mostra a la figura 8.

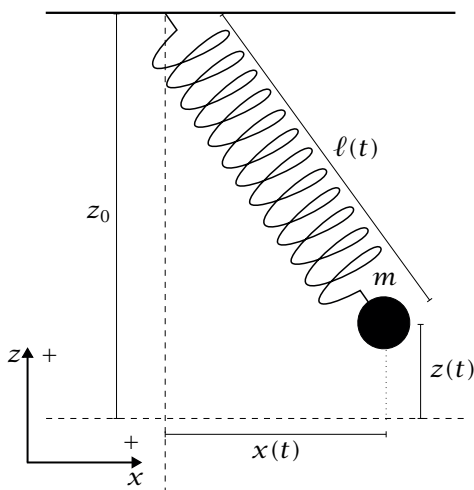


FIGURA 8: Representació d'un pèndol de longitud variable.

Les energies cinètica i potencial del sistema venen donades per les expressions

$$T(t) = \frac{m}{2}(\dot{x}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) \quad \text{i} \quad V(t) = mgz(t) + \frac{k}{2}(\ell_0 - \ell(t))^2,$$

on $\ell(t) = \sqrt{(z_0 - z(t))^2 + x(t)^2}$ és la longitud de la molla a cada instant de temps. L'energia total conservada del sistema s'escriu com

$$\mathcal{H} = T(t) + V(t) = \frac{m}{2}(\dot{x}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) + mgz(t) + \frac{k}{2}(\ell_0 - \ell(t))^2.$$

Ometrem a partir d'ara la dependència temporal per simplicitat. Definim $\omega_s^2 := k/m$ i $\omega_p^2 := g/z_0$ i, amb l'esperit de suposar que les desviacions des de l'equilibri són petites, desenvolupem el hamiltonià \mathcal{H} per a x i z petit fins a ordre cúbic, i obtenim el hamiltonià aproximat

$$H = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega_p^2 x^2) + \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + \omega_s^2 z^2) - \frac{m}{2}\lambda z x^2 + \frac{m}{2} \frac{g^2}{\omega_s^2},$$

on $\lambda := \omega_s^2 \ell_0 / z_0^2$. Observem que els dos primers termes del hamiltonià corresponen a moviments harmònics en les posicions horitzontal i vertical, respectivament. El tercer terme fa d'acoblament entre els dos modes vibratori i permet la transferència d'energia de l'un a l'altre. L'últim terme és constant i no contribueix a la dinàmica. Del hamiltonià aproximat H deduïm les equacions del moviment,

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_p^2 x = \lambda x z, \\ \ddot{z} + \omega_s^2 z = \frac{\lambda}{2} x^2. \end{cases} \quad (33)$$

En termes generals, petites desviacions de la posició d'equilibri corresponen a moviments harmònics independents. Això és el que es dedueix dels termes lineals de les equacions (33), ja que el terme d'acoblament és de grau superior. Però, com veurem a continuació, una ressonància entre les freqüències dels dos oscil·ladors (horitzontal i vertical) pot causar que petites variacions creixin ràpidament en amplitud.

Suposem que la vibració vertical és dominant respecte a l'horitzontal, de tal manera que $x \ll z$. De la segona equació de (33) obtenim que el moviment vertical, amb condicions inicials $z(0) = a$, $\dot{z}(0) = 0$, es pot aproximar per la solució harmònica

$$z(t) = a \cos(\omega_s t).$$

Substituint aquesta a la primera equació de (33), obtenim l'equació diferencial de segon ordre

$$\ddot{x} + (\omega_p^2 - \lambda a \cos(\omega_s t))x = 0. \quad (34)$$

Aquesta equació és un famós cas particular d'equació de Hill coneguda com a equació de Mathieu [24, 26, 38].

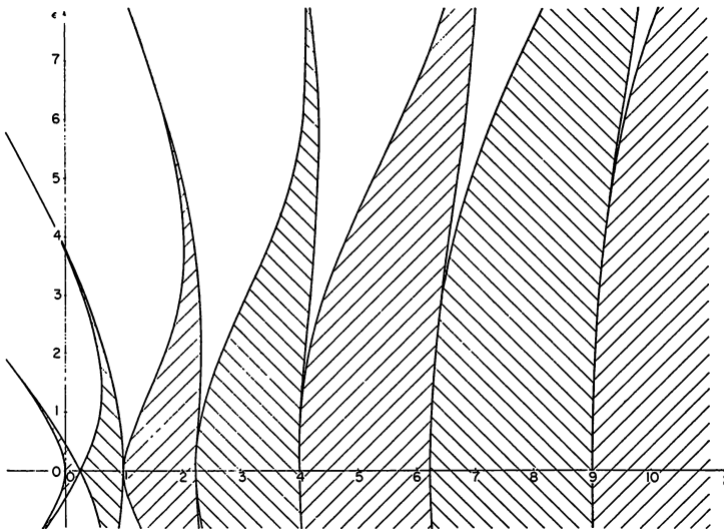


FIGURA 9: Regions estables i inestables de l'equació de Mathieu. Figura extreta de [38, figura 4.1].

En general, l'equació de Mathieu

$$\ddot{x} + (\delta + \epsilon \cos(t))x = 0 \quad (35)$$

ha estat molt estudiada i, en particular, s'han determinat completament les regions d'estabilitat de l'equilibri $x(t) = \dot{x}(t) = 0$ al pla de paràmetres $(\delta, \epsilon) \in \mathbb{R}^2$. A la figura 9 podem veure les regions estables (zones ombrejades) i les

regions inestables (zones en blanc), anomenades, també, *llengües d'Arnold*. Les regions estables es connecten als punts de la forma $(\delta, 0)$ amb $\delta = \frac{n^2}{4}$ per a $n \in \mathbb{N}$. Aquests punts, en particular, són inestables i és d'on «neixen» les zones d'inestabilitat per a $\epsilon \neq 0$. Amb un canvi apropiat de temps, podem relacionar l'equació (34) amb la forma normal de l'equació de Mathieu i obtenir que aquests punts d'inestabilitat corresponen a la relació

$$\frac{\omega_s}{\omega_p} = \frac{2}{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (36)$$

Per a $n = 1$ això es tradueix a $\omega_s = 2\omega_p$, una ressonància de tipus 2 : 1 entre les freqüències dels dos oscil·ladors harmònics de (33). Reprenent la notació $\omega_s^2 = k/m$ i $\omega_p^2 = g/z_0$, observem que la igualtat $\omega_s = 2\omega_p$ es tradueix a

$$\frac{mg}{k} = \frac{z_0}{4}.$$

Imposant aquesta igualtat a (32), obtenim

$$z_0 = \frac{4}{3}\ell_0.$$

És a dir, la ressonància es produeix justament quan la longitud d'equilibri en penjar la massa de la molla és 1/3 més gran que la longitud de la molla en repòs. És important observar que aquest fenomen correspon a la ressonància 2 : 1 entre les freqüències ja que satisfà la identitat (36) amb $n = 1$. La resta de ressonàncies possibles, $n \geq 2$, són incompatibles amb el problema del pèndol de longitud variable a causa de la restricció elemental $z_0 > \ell_0$.

3.2 Model del pont de Tacoma-Narrows

No podríem acabar un text que parla sobre el fenomen de la ressonància sense mencionar, d'alguna manera, un dels exemples més paradigmàtics d'aquest fet. Ja sigui per la seva espectacularitat o per la seva rellevància arquitectònica, l'esdeveniment que va succeir el 7 de novembre de 1940 ha acabat sent un referent de l'efecte de la ressonància.

Són molts els models proposats per donar explicació al col·lapse del pont de Tacoma-Narrows [4, 5, 36]. Molts d'ells estan basats en l'efecte del vent i la creació de vòrtexs a través de la dinàmica de fluids. Per exemple, Amman, von Kármán i Woodruff ([2]) atribueixen el desastre a la ressonància del pont amb el vent basant-se en simulacions dins de túnels de vent. Malgrat això, Scanlan ([37]) i Green i Unruh ([16]) neguen que la creació de vòrtexs fos rellevant en l'augment de les vibracions de torsió. Més recentment s'ha començat a posar de manifest la relació d'aquest fenomen amb el comportament no lineal de les estructures [19]. En aquesta secció visitarem un model en què es proposa que el col·lapse del pont de Tacoma-Narrows és degut a una ressonància interna entre les freqüències de dos modes vibratoris del sistema: les oscil·lacions verticals del pont i les de torsió.

El model que proposen Arioli i Gazzola [3] considera un pont en suspensió format per un nombre finit de barres paraleles connectades mitjançant forces lineals d'atracció. A la figura 10 podem veure'n una representació, on les barres estan ressaltades en negreta i estan unides als tensors verticals, i les àrees transversals representen les connexions entre les diferents barres. Tot i que el model proposat considera un nombre arbitrari de barres acoblades, tant per a la descripció del model com per a extreure'n la conclusió d'inestabilitat del problema, n'hi ha prou de considerar només una barra.

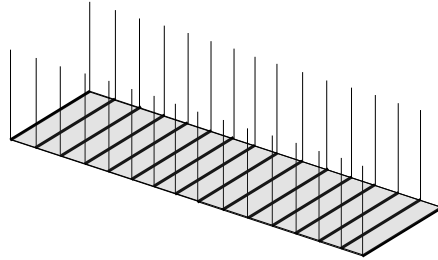


FIGURA 10: Discretització d'un pont en suspensió. Figura inspirada en [3, figura 2].

Considerem una barra de massa m i longitud 2ℓ sostinguda per dos cables als extrems. La posició de la barra es pot descriure pel seu desplaçament vertical $y(t)$ respecte a la posició d'equilibri i l'angle de rotació $\theta(t)$, tal com es mostra a la figura 11. Les forces de suspensió dels cables laterals C_1 i C_2 són denotades amb $f(y + \ell \sin \theta)$ i $f(y - \ell \sin \theta)$, respectivament. Denotant amb $F(s) := -\int_0^s f(u) du$, l'energia potencial del model ve donada per l'expressió

$$V = F(y - \ell \sin \theta) + F(y + \ell \sin \theta),$$

mentre que l'energia cinètica és

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{m \ell^2}{6} \dot{\theta}^2.$$

Observem que el primer terme de l'energia cinètica correspon a l'energia cinètica provinent del moviment vertical, mentre que el segon terme és l'energia cinètica de torsió. De la conservació de l'energia, obtenim el hamiltonià $H = V + T$ i, per tant, deduïm les equacions del moviment

$$\begin{cases} \ddot{y} = \frac{1}{m} (f(y + \ell \sin \theta) + f(y - \ell \sin \theta)), \\ \ddot{\theta} = \frac{3}{\ell m} \cos \theta (f(y + \ell \sin \theta) - f(y - \ell \sin \theta)). \end{cases} \quad (37)$$

Clarament, la massa m no té cap paper en el sistema anterior i, per tant, considerarem $m = 1$ a partir d'ara. Els autors de [3] suggereixen $f(s) := -(s + s^2 + s^3)$ com a model de la força dels cables. Fent servir l'aplicació de

Poincaré al pla $(\theta, \dot{\theta})$, observen que l'equilibri $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ (corresponent a una òrbita periòdica al pla (y, \dot{y})) passa de ser estable a inestable quan l'energia passa un cert llindar. En comptes de seguir els autors, en aquesta secció veurem com el model anterior està relacionat amb l'equació de Mathieu (35).

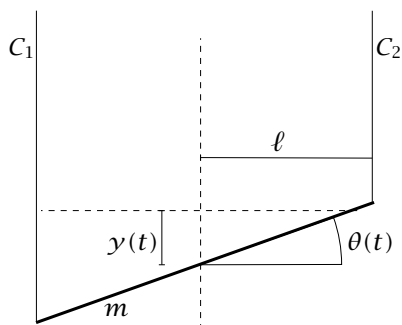


FIGURA 11: Representació d'una barra en suspensió.

Seguint els passos de la secció anterior, considerem que la vibració vertical és dominant respecte a la de torsió, de manera que $\theta \ll y$. Assumint, a més, que el desplaçament vertical és petit, la primera equació de (37) es pot aproximar per l'oscil·lador harmònic $\ddot{y} + 2y = 0$ i, per tant, podem aproximar el moviment vertical per $y(t) = a \cos(\sqrt{2}t)$, $a > 0$. Substituint aquesta expressió en la segona equació de (37) i prenent només el terme lineal en θ de l'equació, obtenim l'equació diferencial

$$\ddot{\theta} + (6 + 12a \cos(\sqrt{2}t) + 18a^2 \cos(\sqrt{2}t)^2)\theta = 0.$$

Fent servir el canvi de temps $\tau = \sqrt{2}t$ i propietats trigonomètriques elementals, obtenim la següent forma generalitzada de l'equació de Mathieu

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \left(3 + \frac{9}{2}a^2 + 6a \cos(\tau) + \frac{9}{2}a^2 \cos(2\tau)\right)\theta = 0. \quad (38)$$

L'augment de l'energia a [3] es pot interpretar com l'augment de l'amplitud a en l'equació anterior. L'equació (38) té la forma d'una generalització de l'equació Mathieu clàssica, donada per

$$\ddot{x} + [\delta + \epsilon(\cos(t) + \alpha \cos(2t))]x = 0.$$

Observem que les dues freqüències involucrades són commensurables. Broer i Simó ([7]) estudien com el diagrama de regions d'estabilitat de l'equació de Mathieu varia quan α és considerat un paràmetre petit. Fent servir, per exemple, els mecanismes que presenten Jordan i Smith a [17], basats en l'existència de solucions 2π -periòdiques o mètodes pertorbatius, és possible construir un diagrama de regions d'estabilitat similar al de la figura 9 quan $\alpha = \alpha(\epsilon)$, com és el cas de l'equació (38). De fet, la solució trivial $x(t) = \dot{x}(t) = 0$ per a $\delta = 3$ i ϵ

i α petits és estable. La inestabilitat prové de la sortida de la regió d'estabilitat en augmentar ϵ i α . Això es deu al fet que $\delta = 3$ no és un punt de naixement de les regions d'inestabilitat de l'equació de Mathieu. Sembla raonable pensar que els resultats d'estabilitat presentats a [3] es poden relacionar amb les regions d'estabilitat de l'equació de Mathieu amb dues freqüències commensurables.

Agraïments

L'autor agraeix a Armengol Gasull, Rafael Ortega i Jordi Villadelprat per la lectura del manuscrit i els suggeriments que sens dubte han servit per millorar aquest article.

L'autor és membre del grup de recerca finançat 2021SGR00113 i aquest treball ha estat produït sota el finançament del projecte PID2020-118281GB-C31.

Referències

- [1] ALONSO, J. M.; ORTEGA, R. «Roots of unity and unbounded motions of an asymmetric oscillator». *J. Differential Equations*, 143 (1) (1998), 201-220.
- [2] AMMAN, O. H.; VON KÁRMÁN, T.; WOODRUFF, G. B. «The failure of the Tacoma Narrows Bridge». Federal Works Agency (1941).
- [3] ARIOLI, G.; GAZZOLA, F. «A new mathematical explanation of what triggered the catastrophic torsional mode of the Tacoma Narrows Bridge». *Appl. Math. Model.*, 39 (2) (2015), 901-912.
- [4] BLEICH, F. «Dynamic instability of truss-stiffened suspension bridges under wind action». *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 114 (1) (1949), 1177-1222.
- [5] BLEICH, F.; MCCULLOUGH, C. B.; ROSECRANS, R.; VINCENT, G. S. *The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges*. Washington DC: U.S. Government Printing Office, 1950.
- [6] BONHEURE, D.; FABRY, C.; SMETS, D. «Periodic solutions of forced isochronous oscillators at resonance». *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 8 (4) (2002), 907-930.
- [7] BROER, H.; SIMÓ, C. «Resonance tongues in Hill's equations: a geometric approach». *J. Differential Equations*, 166 (2) (2000), 290-327.
- [8] CHALYKH, O. A.; VESELOV, A. P. «A remark on rational isochronous potentials». *J. Nonlinear Math. Phys.*, 12 (2005) 179-183.
- [9] CIMA, A.; MAÑOSAS, F.; VILADELPRAT, J. «Isochronicity for several classes of Hamiltonian systems». *J. Differential Equations*, 157 (2) (1999), 373-413.
- [10] DANCER, E. N. «Boundary-value problems for weakly nonlinear ordinary differential equations». *Bull. Austral. Math. Soc.*, 15 (3) (1976), 321-328.

- [11] DANCER, E. N. «On the Dirichlet problem for weakly non-linear elliptic partial differential equations». *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 76 (4) (1976/77), 283–300.
- [12] ERMAKOV, V. P. «Second-order differential equations: conditions of complete integrability». *Appl. Anal. Discrete Math.*, 2 (2) (2008), 123–145. [Traduït de l'original rus, de 1880, per A. O. Harin i editat per P. G. L. Leach.]
- [13] FONDA, A. «Positively homogeneous Hamiltonian systems in the plane». *J. Differential Equations*, 200 (1) (2004), 162–184.
- [14] FUČÍK, S. «Boundary value problems with jumping nonlinearities». *Časopis Pěst. Mat.*, 101 (1) (1976), 69–87.
- [15] FUČÍK, S. *Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems*. Dordrecht-Boston, Mass.: D. Reidel Publishing Co., 1980. (Mathematics and its Applications; 4) [Amb un pròleg de Jean Mawhin]
- [16] GREEN, D.; UNRUH, W. G. «The failure of the Tacoma bridge: a physical model». *Amer. J. Phys.*, 74 (8) (2006), 706–716.
- [17] JORDAN, D. W.; SMITH, P. *Nonlinear Ordinary Differential Equations. An Introduction to Dynamical Systems*. 3a ed. Oxford: Oxford University Press, 1999. (Oxford Texts in Applied and Engineering Mathematics; 2)
- [18] KUNZE, M. «Remarks on boundedness of semilinear oscillators». A: *Nonlinear Analysis and its Applications to Differential Equations*. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2001, 311–319. (Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.; 43)
- [19] LACARBONARA, W. *Nonlinear Structural Mechanics. Theory, Dynamical Phenomena and Modeling*. Nova York: Springer, 2013.
- [20] LAZER, A. C.; MCKENNA, P. J. «Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis». *SIAM Rev.*, 32 (4) (1990), 537–578.
- [21] LIU, B. «Boundedness in asymmetric oscillations». *J. Math. Anal. Appl.*, 231 (2) (1999), 355–373.
- [22] MAÑOSAS, F.; TORRES, P. J. «Isochronicity of a class of piecewise continuous oscillators». *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133 (10) (2005), 3027–3035.
- [23] MASSERA, J. L. «The existence of periodic solutions of systems of differential equations». *Duke Math. J.*, 17 (1950), 457–475.
- [24] MATHIEU, É. «Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique». *J. Math. Pures Appl.*, 13 (1868), 137–203.
- [25] MAWHIN, J. «Resonance and nonlinearity: a survey». *Ukrainian Math. J.*, 59 (2) (2007), 197–214.
- [26] MINORSKY, N. *Introduction to Nonlinear Mechanics*. Ann Arbor: Edwards, 1947.
- [27] MOULD, S. «A better explanation of resonance». <https://youtu.be/dihQuwrf9yQ>.

- [28] MOULD, S. «What if swings had springs instead of ropes: Autoparametric Resonance». <https://youtu.be/MUJmK17QfDU>.
- [29] OLSSON, M. G. «Why does a mass on a spring sometimes misbehave?». *Amer. J. Phys.*, 44 (1976), 1211-1212.
- [30] ORTEGA, R. «Periodic perturbations of an isochronous center». *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 3 (1) (2002), 83-91.
- [31] ORTEGA, R. *Periodic Differential Equations in the Plane. A Topological Perspective*. Berlin: De Gruyter, 2019. (De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications; 29)
- [32] ORTEGA, R.; ROJAS, D. «A proof of Bertrand's theorem using the theory of isochronous potentials». *J. Dynam. Differential Equations*, 31 (4) (2019), 2017-2028.
- [33] ORTEGA, R.; ROJAS, D. «Periodic oscillators, isochronous centers and resonance». *Nonlinearity*, 32 (3) (2019), 800-832.
- [34] PINNEY, E. «The nonlinear differential equation $y'' + p(x)y + cy^{-3} = 0$ ». *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1 (1950), 681.
- [35] REDHEFFER, R.; REDHEFFER, I. «Steen's 1874 paper: historical survey and translation». *Aequationes Math.*, 61 (1-2) (2001), 131-150.
- [36] ROCARD, Y. *Dynamic Instability: Automobiles, Aircraft, Suspension Bridges*. Londres: Crosby Lockwood, 1957.
- [37] SCANLAN, R. H. «Developments in low-speed aeroelasticity in the civil engineering field». *AIAA J.*, 20 (6) (1982), 839-844.
- [38] STOKER, J. J. *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*. Nova York, N.Y.: Interscience Publishers, Inc., 1950.
- [39] URABE, M. «Potential forces which yield periodic motions of a fixed period». *J. Math. Mech.*, 10 (1961), 569-578.
- [40] URABE, M. «The potential force yielding a periodic motion whose period is an arbitrary continuous function of the amplitude of the velocity». *Arch. Rational Mech. Anal.*, 11 (1962), 27-33.
- [41] VENDERA, J. «Vocal Coach Jaime Vendera Shatters Glass #85». <https://youtu.be/Jy8js2FmGiY>.
- [42] ZAMPIERI, G. «On the periodic oscillations of $\ddot{x} = g(x)$ ». *J. Differential Equations*, 78 (1989), 74-88.